ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ

А.А.МАРТЫНЮК, Р.В.МУЛЛАЖОНОВ

Ушбу мақолада дифференциал тенгламалар кўринишидаги йирик масштабли динамик системаларнинг турғунлигини текширилиб янги натижалар олинди. Бундан ташқари, Ляпунов функциясидан фойдаланиб, чизиқли ва автоном чизиқсиз йирик масштабли системалар нол ечимининг глобал асимптотик турғунлиги ва турғунмаслигининг етарли шартлари ҳосил қилинди.

We present new stability results for large scale dynamical systems determined by a some classes of differential equations. Using quadratic form Lyapunov functions, we also establish sufficient conditions for the global asymptotic stability and instability of the null solution of the linear and avtonoms nonlinear large scale systems.

§ 1 Предварительные результаты.

Предлагаемый в работе подход основан на специальном представлении скалярных либо векторных функций через строго положительные функции. Введем некоторые определения.

Определение 1. Функция $\varphi(x): R^n \to R$ называется

1) строго положительной, если существует инвариантная во времени окрестность N точки $x = \mathbf{O}$, N $\subseteq R^n$ такая, что

а) $\varphi(x)$ - непрерывна на N ; $\varphi(x) \in$ C (N);

б) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\varphi(x)$ не меньше ε на N, т.е. $\varphi(x) \geq \varepsilon > 0,$ при всех $x \in$ N ;

в) $\varphi(0) \geq \min \varphi(x) = \varepsilon > 0$;

2) строго положительной в целом, если условия а) - в) определения 1 выполняются при N = R^n :

3) строго отрицательной (в целом), если $(-\varphi(x))$ – строго положительная (в целом).

Определение 2. Функция $\varphi(t,x): R \times R^n \to R$ называется

1) строго положительной на T $_\tau = [\tau, +\infty[$, $\tau \in R_+$, если существует связная инвариантная во времени окрестность N точки $x = 0,$ N $\subseteq R^n$ такая что

а) $\varphi(t,x) -$ непрерывная по $(t,x) \in$ T $_\tau \times$ N , $\varphi(t,x) \in$ C(T $_\tau \times$ N);

б) существует функция $\varepsilon(t) > 0$ такая, что $\varphi(t,x)$ не меньше $\varepsilon(t)$ на N,

$\varphi(t,x) \geq \varepsilon(t) > 0,$ при всех $(t,x) \in$ T $_\tau \times$ N ;

в) $\varphi(t,0) \geq \min \varphi(t,0) = \varepsilon(t)$, $\forall t \in$ T $_\tau$;

2) строго положительной в целом на T $_\tau$ если условия а) - в) определения 2 выполняются при N $= R^n$;

3) строго отрицательной (в целом) на T $_\tau$ (на T $_\tau \times$ N) если $(-\varphi(t,x))$ – строго положительная (в целом) на T $_\tau$ (на T $_\tau \times$ N).

В приведенных определениях выражение « на T $_\tau \times$ N » опускается, если все соответствующие условия выполняются при всех $t \in R_+$.

Из этих определений следует справедливость следующих утверждений:

1. Действительное число $\alpha > 0$ строго положительное, $\beta < 0$ строго отрицательное;
2. Если функции $\varphi_i(\cdot),\ i = \overline{1,n}$ строго положительные, $v_j(\cdot),\ j = \overline{1,m}$ положительно определенные (по-

луопределенные) и действительные числа $\alpha_i > 0,\ i = \overline{1,n}$, то функции $\alpha_i\varphi_i(\cdot),\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(\cdot),$ $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(\cdot)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j v_j(\cdot)$ являются строго положительными, а функции $\alpha_i\varphi_i(\cdot)v_j(\cdot),\quad \alpha_i\frac{v_j(\cdot)}{\varphi_i(\cdot)},\quad \alpha_i v_j(\cdot)$ являются положительно определенными (полуопределенными).

3 Произвольную функцию $f(x): R^n \to R,\ x \in R^n$ можно представить в виде разности двух строго положительных функции. Действительно;

$f(x)=\frac{1}{2c}\left[(f(x)+c)^2 - f^2(x) - c^2\right]=\frac{(f(x)+c)^2+k^2}{2c}-\frac{f^2(x)+c^2+k^2}{2c}=\varphi_1(x)-\varphi_2(x),$ где $c>0,\ k\neq 0$ действительные числа, $\varphi_1(x)=\frac{(f(x)+c)^2+k^2}{2c}>0,\quad \varphi_2(x)=\frac{f^2(x)+c^2+k^2}{2c}>0.$

4 Если $x \in R^n$, скалярная функция $\varphi(x): R^n \to R$ строго положительная (отрицательная), то состояние равновесия $x=0$ уравнения $\dot{x}=\varphi(x)x$ неустойчиво (асимптотически устойчиво).

5 Пусть $x \in R^n$, скалярные функции $\varphi_i(x): R^n \to R,\ i=\overline{1,k}$ строго положительные, $g_j(x): R^n \to R,\ j=\overline{1,s}$ строго отрицательные, тогда состояние равновесие $x=0$ системы

$$\dot{x}=(\sum_{j=1}^{s} g_j(x))x,\quad \left(\dot{x}=(\sum_{i=1}^{k}\varphi_i(x))x\right)$$
$$\dot{x}=\left(\varphi_i(x)g_j(x)\right)x,\ \ 1\le i\le k,\ \ 1\le j\le s,$$
$$\left(\dot{x}=\left(\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right)x,\quad \dot{x}=\left(g_i(x)g_j(x)\right)x,\ \ 1\le i\le k,\ \ 1\le j\le s\right)$$

асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Определение 3. Числа $\varepsilon\ (\min\varepsilon(t))$ в определении 1 (определении 2) называются порядком строгости строго положительной функции $\varphi(x)\ \ (\varphi(t,x))$.

Замечание 1. Если в определении1 (определении2) $\min\varphi(x)=\varphi(0)$, $\varepsilon=0\ \ (\min\varphi(t,x)=\varphi(t,0),\ \varepsilon(t)=0,)$, тогда эти определения совпадают с определениями положительной (отрицательной) полуопределенности функций $\varphi(x)\ \ (\varphi(t,x))$, приведенных в монографии [1].

6 Пусть $\varphi_1(x)$ строго положительная функция порядка $\varepsilon_1>0,\ \varphi_2(x)$ строго отрицательная функция порядка $-\varepsilon_2$, $\varepsilon_2>0$ и $\min\varphi_1(x)=\varphi_1(0)$, $\min\varphi_2(x)=\varphi_2(0)$ тогда состояние равновесия $x=0$ системы

$\dot{x}=\left(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\right)x$ (1.1) асимптотически устойчиво при $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, и неустойчиво при $\varepsilon_1>\varepsilon_2$.

Действительно, разлагая функции $\varphi_1(x)\ u\ \ \varphi_2(x)$ в ряд Тейлора, в окрестности состояние равновесия $x=0$ получим первое приближение системы $\dot{x}=\left(\varphi_1(0)+\varphi_2(0)\right)x$ (1.1) в следующем виде

или на основе определения 1 имеем $\dot{x}=\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)x$

Отсюда, следует справедливость утверждения на основе теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Лемма 1.1. Произвольную функцию $f(x): R^n \to R$ можно представить в виде линейной комбинации линейно независимых строго положительных функций.

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ в следующем виде

$f(x)=\alpha_0+\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+\ldots+\alpha_p f_p(x)$ (1.2) где $\alpha_i,\ i=\overline{0,p}$ действительные числа, $f_i(x),\ i=\overline{1,p}$ некоторые линейно независимые функции.

Рассмотрим функции $f_0(x)\equiv 1,\ f_1(x), f_2(x),\ldots, f_p(x)$

Если среди этих функции существуют строго положительные, то их оставим без изменений. Если $f_i(x),\ 1\le i\le p$ строго отрицательные, то их заменим с функциями $-f_i(x)$, т.е. $\alpha_i f_i(x)=-\alpha_i(-f_i(x))$. Ос-

тальные функции, на основе утверждении 3, представим в виде разности двух строго положительных функции. Учитывая все сказанное в разложение (1.2), получим линейную комбинацию некоторых линейно независимых строго положительных функции, т.е.

$$f(x) = \alpha_0' + \alpha_1'\varphi_1(x) + \alpha_2'\varphi_2(x) + ... + \alpha_k'\varphi_k(x) \qquad (1.3)$$

где $\alpha_i' \in R,\ \varphi_0(x) \equiv 1,\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),...,\varphi_k(x)$ -линейно независимые строго положительные функции.

Отметим, что разложение (1.3) является не единственным, это разложение можно получить другим путем, например, применяя утверждение 3 для всех функции $f_i(x),\ i = \overline{1,\ p}$ в выражении (1.2).

Следствие 1. Для последовательности функций $g_1(x),\ g_2(x),...,g_s(x) \qquad (1.4)$ существуют линейно независимые строго положительные функции $\varphi_0(x) = c,\ \varphi_1(x), \varphi_2(x),....,\varphi_k(x) \qquad (1.5)$ такие, что

$$g_i(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{ij}\varphi_j(x), \quad i = 1,2,..,s \quad (1.6) \text{ где } \quad \alpha_{ij} \in R,\ i = \overline{1,s},\ j = \overline{1,k}.$$

Действительно, на основе леммы 1.1 для каждой функции $g_i(x),\ i = \overline{1,s}$ найдутся линейно независимые строго положительные функции $\varphi_j(x)$ такие, что $g_i(x) = \sum_{j=0}^{l_i} \alpha_{ij}\varphi_j(x),\ 1 \le i \le s$ где $l_1 + l_2 + ... + l_s = l.$

Если среди $\varphi_j(x),\ j = \overline{1,l}$ нет одинаковых, тогда возьмем $l = k$; если некоторые из них одинаковые, тогда из одинаковых $\varphi_j(x)$ возьмем одни и получим одну из функций (1.5). В разложении (1.6) коэффициенты при функциях равны нолю.

Следствие 2. Пусть функция $f(x): R^n \to R$ представлена в виде (1.3) и функции $\varphi_i(x)$ имеют порядок строгости $\varepsilon_i,\ i = \overline{1,k}$ соответственно. Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы

$\dot{x} = f(x)x$ асимптотически устойчиво, если $\alpha_0' + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i'\varepsilon_i < 0,$ и неустойчиво, если $\alpha_0' + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i'\varepsilon_i > 0.$

§ 2. Анализ устойчивости некоторых нелинейных систем.

Далее изложим способ анализа устойчивость некоторых нелинейных крупномасштабных систем, используя при этом квадратную функцию Ляпунова, построенного для промежуточной линейной системы. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть скалярная функция $\varphi(x): R^n \to R$ строго положительная. Состояние равновесия $x = 0$ систем $\dot{x} = Ax \qquad (2.1)\ \dot{x} = A\varphi(x)x, \qquad (2.2)$ где $x \in R^n$, А – $n \times n$ постоянная матрица, одновременно будет устойчивым (асимптотически устойчивым) или неустойчивым соответственно.

Доказательство. Пусть для системы (2.1) построена функция Ляпунова $v(x) = x^T Px \qquad (2.3)$

где $x \in R^n$, u P - $n \times n$ положительно определенная, симметрическая относительно главной диагонали матрица. Тогда имеем,

$\dot{v}(x(t))|_{(2.1)} = x^T(A^T P + PA)x,$

$\dot{v}(x(t))|_{(2.2)} = x^T(A^T\varphi(x)P + P\varphi(x)A)x = x^T(A^T P + PA)x\varphi(x) = \dot{v}(x(t))|_{(2.1)}\ \varphi(x)$

Так, как функция $\varphi(x)$ - строго положительная, то функции $\dot{v}(x(t))|_{(2.1)}$ и $\dot{v}(x(t))|_{(2.2)}$ имеют одинаковой знак. Откуда следует справедливость утверждений теоремы 2.1.

Далее рассмотрим нелинейные системы уравнений возмущенного движения

$\dot{x} = f(x), \qquad (2.4)$ где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n,\ f(x): R^n \to R^n,\ f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)),\ f(0) = 0.$

Предположим что $f_j(x) = \sum_{l=1}^{n} f_{jl}(x)x_l,\ j = \overline{1,n}$. При этом систему (2.4) можно представить в следующим виде

$\dot{x} = A(x)x, \qquad (2.5)$ где $A(x) = \left(f_{jl}(x)\right),\ j,l = \overline{1,n}$.

На основе следствия 1 лемма 1.1 для функции $f_{jl}(x)$, $j,l=\overline{1,n}$ существуют линейно независимые строго положительные скалярные функции $\varphi_0(x)=c, \varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_m(x)$, с порядком строгости $\varepsilon_i>0,\ i=\overline{1,m}$, соответственно, такие, что $f_{jl}(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{jl}^{i}\varphi_i(x),\ j,l=\overline{1,n}$ где α_{jl}^{i}-некоторые постоянные.

Учитывая это система (2.4) представим в виде $\dot{x}=\left(\sum_{i=0}^{m}A_i\varphi_i(x)\right)x,$ (2.6) где $A_i=\left(\alpha_{jl}^{i}\right),\ j,l=\overline{1,n},\ i=\overline{1,m}$.

Для исследования устойчивости состояния равновесия $x=0$ системы (2.6) вместе с этой системой рассмотрим следующие системы $\dot{x}=A_ix,\ i=1,2,3,...,m,$ (2.7)

Лемма 2.1. Если матрицы $A_i, i=1,2,...m$ невырожденные, симметрические относительно главной диагонали и для каждого i $(i\le 1\le m)$ A_i и $-A_i$ не имеют общих собственных значений, то для каждой матрицы A_i существует матрица $G_{i0}=G_{i0}^{T}\in R^{n\times n}$ такая, что матрица $P=A_i^{-1}G_{i0}+G_{i0}^{T}A_i^{-1},\ i=1,2,...,m$ (2.8)

удовлетворяет уравнениям $A_i^{T}P+PA_i=G_i,\ i=1,2,...,m$ (2.9) где

$G_i=G_{i0}+G_{i0}^{T}+A_i^{-1}G_{i0}A_i+(A_i^{-1}G_{i0}A_i)^{T},\ i=1,2,...,m$ (2.10)

Доказательство. Если $G_{i0}=G_{i0}^{T}$, то соотношения (2.8) равносильно следующим матричным уравнениям относительно матриц G_{i0} $A_i^{-1}G_{i0}+G_{i0}A_i^{-1}=P$ $(1\le i\le m)$ (2.11)

Уравнения (2.11) имеют единственное решение, так как из–за невырожденности матриц A_i для каждого $1\le i\le m$ матрицы A_i^{-1} и - A_i^{-1} не имеют общих собственных значений (см. [2]).

Учитывая, что $A_i=A_i^{T},\ i=1,2,...,m,$ имеем

$$A_i^{T}P+PA_i=A_i\left(A_i^{-1}G_{i0}+G_{io}^{T}A_i^{-1}\right)+\left(A_i^{-1}G_{i0}+G_{i0}^{T}A_i^{-1}\right)A_i=G_{i0}+A_iG_{i0}^{T}A_i^{-1}+A_i^{-1}G_{i0}A_i+G_{i0}^{T}=$$
$$=G_{i0}+G_{i0}^{T}+A_i^{-1}G_{i0}A_i+(A_i^{-1}G_{i0}A_i)^{T}=G_i$$

Заметим, что из вида (2.10) следует однотипность знакоопределенности матриц G_i и $G_{i0},\ i=1,2,...,m$.

Следствие 3. Если выполняются все условия леммы 2.1 и

$G_{i0}=A_iH,\ i=1,2,...,m,$ (2.12) где $H\in R^{n\times n}$-положительно определенная матрица, то матрица $P=H+H^{T}$ удовлетворяет уравнениям (2.9). Действительно, учитывая, что $A_i^{T}=A_i$, из (2.8) получим

$$P=A_i^{-1}(A_iH)+(A_iH)^{T}A_i^{-1}=A_i^{-1}A_iH+H^{T}A_iA_i^{-1}=H+H^{T}.$$

Теорема 2.2 Пусть в системах (2.6) и (2.7) матрицы A_i и функции $\varphi_i(x)$ удовлетворяют условиям:

а) матрицы $A_i\in R^{n\times n},\ i=1,2,...,m$ невырожденные, симметрические относительно главной диагонали и для каждого $1\le i\le m$ A_i и $-A_i$ не имеют общих собственных значений;

б) $\varphi_i(x)$ - строго положительные скалярные функции с порядком строгости $\varepsilon_i>0,\ i=1,2,...,m$, соответственно;

Тогда из устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости состояние равновесия $x=0$ всех систем (2.7) следует устойчивость (асимптотической устойчивость) или неустойчивость состояние равновесие системы (2.6) соответственно.

Доказательство. На основе условия а) теоремы 2.2 и леммы 2.1 для систем (2.7) существует функция Ляпунова $v(x)=x^{T}Px,$ (2.13) где матрица P - положительно определенная, симметрическая относительно главной диагонали и имеет вид (2.8).

Для полной производной функции (2.13) в силу i – ой системы совокупности систем (2.7) имеем

$(\dot{v}(x(t)))\,|_{(2.7)}=x^{T}\left(A_i^{T}P+PA_i\right)x=x^{T}G_ix,\ 1\le i\le m$ Отсюда следует, что

$\lambda_m(G_i)\|x\|^2\le(\dot{v}(x(t)))\,|_{(2.7)}\le\lambda_M(G_i)\|x\|^2,$ (2.14) где $(\dot{v}(x(t)))\,|_{(2.7)}$ - означает, что производная берется в

силу i-ой системы совокупности систем (2.7), G_i имеют вид (2.10), $\lambda_m(G_i)$ и $\lambda_M(G_i)$ минимальные и максимальные собственные значения матриц G_i соответственно.

В качестве функции Ляпунова для системы (2.6) возьмем функцию (2.13). Ее полная производная в силу системы (2.6) имеет вид.

$$(\dot v(x(t))\,|_{(2.6)} = x^T\left[\left(\sum_{i=1}^m A_i\varphi_i(x)\right)^T P + P\left(\sum_{i=1}^m A_i\varphi_i(x)\right)\right]x = x^T\left[\sum_{i=1}^m \varphi_i(x)(A_i^T P + PA_i)\right]x =$$

$$= \sum_{i=1}^m \varphi_i(x)\left[x^T(A_i^T P + PA_i)x\right] = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x)x^T G_i x = \sum_{i=1}^m \varphi_i(x)(\dot v(x(t))\,|_{(2.7)}$$

Нетрудно проверит справедливость следующих неравенств:

$$\left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\lambda_m(G_i)\right]\|x\|^2 \le \left(\dot v(x)\right)_{2.6} \le \left[\sum_{i=1}^n \max_{x\in R^n}\varphi_i(x)\lambda_M(G_i)\right]\|x\|^2, \qquad (2.15)\ \text{если}\ \ \lambda_m(G_i) > 0,\ i = 1,2,...,m;$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \max_{x\in R^n}\varphi_i(x)\lambda_m(G_i)\right]\|x\|^2 \le \left(\dot v(x)\right)_{2.6} \le \left[\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\lambda_M(G_i)\right]\|x\|^2, \qquad (2.16)\ \text{если}\ \ \lambda_M(G_i) \le 0,\ i = 1,2,...,m;$$

Из неравенств (2.14)-(2.16) и условия $\varepsilon_i > 0,\ i = 1,2,...,m$ следует справедливость утверждений теоремы 2.2.

Пример. Рассмотрим систему четвертого порядка, которые описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
\dot x_1 &= (2 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2 x)x_1 + (x^2 + 2\sin^2 x + 1)x_2 + x_3 + (3e^{x^2} - 2)x_4,\\
\dot x_2 &= (x^2 + 2\sin^2 x + 1)x_1 + (2 - 9e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2 x)x_2 + (3e^{x^2} - 2)x_3 + x_4, \qquad (2.17)\\
\dot x_3 &= x_1 + (3e^{x^2} - 2)x_2 + (1 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2 x)x_3 + (3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2 x - 1)x_4,\\
\dot x_4 &= (3e^{x^2} - 2)x_1 + x_2 + (3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2 x - 1)x_3 + (1 - 6e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2 x)x_4,
\end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$.

В системе (2.17) выполняются условия $f_i(x) = \sum_{j=1}^4 f_{ij}(x)x_j,\ \ i = 1,2,3,4,$ поэтому ее можем представит в виде (2.5), т.е. $\dot x = A(x)x, \qquad (2.18)$ где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$,

$$A = \begin{pmatrix}
2 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2 x & x^2 + 2\sin^2 x + 1 & 1 & 3e^{x^2} - 2\\
x^2 + 2\sin^2 x + 1 & 2 - 9e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2 x & 3e^{x^2} - 2 & 1\\
1 & 3e^{x^2} - 2 & 1 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2 x & 3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2 x - 1\\
3e^{x^2} - 2 & 1 & 3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2 x - 1 & 1 - 6e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2 x
\end{pmatrix}$$

Обозначим, $\varphi_1(x) = 3e^{x^2} - 2$ и $\varphi_2(x) = x^2 + 2\sin^2 x + 1$. Нетрудно проверить, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ строго положительные. Тогда система (2.18) представляется в следующем виде

$$\dot x = A_0 x + \varphi_1(x)A_1 x + \varphi_2(x)A_2 x, \qquad (2.19)\ \text{где}\ x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T,$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Для исследования устойчивости состояние равновесия $x = 0$ системы (2.19) вместе с этой системой рассмотрим следующие системы

$$\dot{x} = A_0 x, \qquad (3.20)$$

$$\dot{x} = A_1 x, \qquad (3.21)$$

$$\dot{x} = A_2 x, \qquad (3.22)$$

Характеристические уравнение матрицы A_0 и A_2 имеет вид $(\lambda^2 + 3\lambda + 1)^2 = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = -1{,}5 + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}382 < 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -1{,}5 - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -2{,}618 < 0$, а характеристические уравнение матрицы A_2 имеет вид $\lambda^4 + 9\lambda^3 + 27\lambda^2 + 30\lambda + 9 = 0$ и $\lambda_1 = -3 < 0$, $\lambda_2 \approx -3{,}532 < 0$, $\lambda_3 \approx -1{,}647 < 0$, $\lambda_4 \approx -0{,}468 < 0$

Итак, состояние равновесие системы (2.20), (2.21), (2.22) асимптотически устойчиво, поэтому на основе теоремы 2.2 состояние равновесия $x = 0$ системы (2.19), а также (2.17) асимптотически устойчиво.

Следствие 4. Если состояние равновесия $x = 0$ хотя бы одной системы из совокупности систем (2.7) асимптотически устойчиво, и состояние равновесия $x = 0$ остальных систем устойчиво, то состояние равновесия системы (2.6) асимптотически устойчиво.

Справедливость следствие 4 следует из неравенства (2.16).

Следствие 5. Пусть выполняются все условия теоремы 2.2. Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (2.6)

а) устойчиво, если $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \lambda_M(G_i) \le 0;$

б) асимптотически устойчиво, если $\sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \lambda_M(G_i) < 0;$

в) неустойчиво, если $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \lambda_m(G_i) > 0.$

Справедливость следствия 5 следует из неравенств (2.15) и (2.16).

Из определения строго положительных функций следует, что если $\min \varphi(x) = \varphi(0)$, то первое приближения системы (2.6) имеет вид: $\dot{x} = \left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i A_i \right) x, \qquad (2.23)$ где $\varepsilon_i > 0$ порядок строгости функции $\varphi_i(x)$ соответственно.

Замечание. Теорема 2.2, следствие 4 и следствие 5 остаются в силе если рассмотреть вместо системы (2.6) ее первое приближение, т.е. системы (2.23).

ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Груйич, Л.Т, Мартынюк, А.А., Риббенс-Павелла, М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях.- Киев: Наукова Думка, 1984

2. Ланкастер П. Теория матриц.- М.: Наука, 1982

3. Мартынюк, А.А., Задорожный, В.Ф, О решении общей задачи агрегирования как проблемы моментов // Математическая физика.- 1973.- Вып 14.- С.49-55

4. Матросов, В.М. Метод векторных функций Ляпунова: Анализ динамических свойств нелинейных систем.- М.: Физматлит, 2001.- 380 с.

5. Миладжонов В.Г., Муллажонов, Р.В., Об одном методе анализа устойчивости линейных крупномасштабных систем // Проблемы механики.- Ташкент.- 2009 .- № 2-3.- С. 28-30

6. Муллажонов, Р.В, Обобщенное транспонирование матриц и структуры линейных крупномасштабных систем // Док. НАН України.-2009.- № 11.