ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СТРУКТУРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ

В.Ғ.Миладжонов, Р.В.Муллажонов, Ш.Н.Абдугаппарова

Ушбу ишда Ляпунов матрица-функцияси усули ёрдамида чизиқли йирик масштабли системалар мувозанат ҳолати структурали турғунлигининг етарли шартлари ҳосил қилинган.

In this paper sufficient conditions of structural sustainability of liner large scale systems stability were formed according to Lyapunov matrix-function.

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = A_i x_i + \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq i}}^{s} S_{ij} A_{ij} x_j, \quad i = 1.2,...,s, \quad (1)$$

где A_{ij} –постоянные матрицы соответствующего порядка

$$\Im_s = \{S : S = diag\{S_1, S_2,..., S_s\}, \quad S_i = [S_{i1}...S_{ii-1} I\, S_{ii+1}...S_{is}], 0 \le S_{ij} \le I\},$$

I-единичная матрица соответствующей размерности

$$n_1 + n_2 + ... + n_s = n, \quad x = (x_1^T, x_2^T,..., x_s^T)^T \in R^n.$$

Для системы (1) построим матрицу-функцию

$$V(x) = [v_{ij}(x_i, x_j)], \ \ v_{ij} = v_{ji}, \ \ i, j = 1,2,...,S \quad (2)$$

с элементами

$$v_{ii}(x_i) = x_i^T B_{ii} x_i, \quad i = 1,2,...,S$$

$$v_{ij}(x_i, x_j) = v_{ji}(x_j, x_i) = x_i^T B_{ij} x_j, \quad i = 1,2,...,s-1, j = 2,...,s; \ i > j, \quad (3)$$

где B_{ii}, $i = 1,2,...,s$ -симметрические положительно-определенные матрицы, B_{ij}, $i = 1,2,...,s-1$, $j = 2,3,...,s$; $i < j$ постоянные матрицы.

Нетрудно проверит, что для функций (3) верны оценки :

$$\lambda_m(B_{ii})\|x_i\|^2 \le v_{ii}(x_i) \le \lambda_M(B_{ii})\|x_i\|^2 \quad \forall x_i \in N_{ix0}, \ i = 1,2,...,s$$

$$-\lambda_M^{\frac{1}{2}}(B_{ij}B_{ij}^T)\|x_i\|\|x_j\| \le v_{ij}(x_i, x_j) \le \lambda_M^{\frac{1}{2}}(B_{ij}B_{ij}^T)\|x_i\|\|x_j\| \quad (4)$$

$$\forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{jx0}, i = 1,2,...,s-1; \quad j = 2,3,...,s, \ \ i < j,$$

где $\lambda_m(B_{ii})$ и $\lambda_M(B_{ii})$ -минимальные и максимальные собственные числа матриц B_{ij}, $i = 1,2,...,s-1$; $j = 2,3,...,s$; $i < j$ соответственно.

С помощью матрицы-функции (2) и вектора $\eta \in R_+^s$, $\eta_i > 0$, $i = 1,2,...,s$ введем функцию

$$V(x) = \eta^T U(x) \eta. \quad (5)$$

Лемма 1. Если элементы (3) матрицы-функции (2) удовлетворяют оценкам (4), то функция (5) удовлетворяет двухстороной оценке

$$u^T H^T A H u \le v(x) \le u^T H^T B H u,$$

где

$$u^T = (\|x_1\|, \|x_2\|,..., \|x_s\|), \ H = diag\{\eta_1, \eta_2,..., \eta_s\}, \ A = [a_{ij}], \ B = [b_{ij}], \ i, j = 1,2,...,s,$$
$$a_{ii} = \lambda_m(B_{ii}), \ \ b_{ii} = \lambda_M(B_{ii}) \ \ i = 1,2,...,s,$$

$$a_{ij} = -b_{ij} = -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(B_{ij}B_{ij}^T) \quad i = 1,2,...,s-1; j = 2,...,s, \ i < j;$$
$$a_{ij} = a_{ji}; \ b_{ij} = b_{ji}, \ i \neq j.$$

Наряду с функций (5) рассматривается ее полная производная

$$D^+v(x) = \eta^T D^+U(x)\eta \qquad (7)$$

вдоль решений системы (1).

Лемма 2. Если для системы. (1) существует матрица-функция (2) с элементами (3), то полные производные функций (3) в силу системы (1) удовлетворяют оценкам:

а) $$\eta_i^2 D^+v_{ii}(x_i) \le p_{1i}\|x_i\|^2 + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} p_{1ij}(s)\|x_i\|\|x_j\| \quad \forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{jx0}$$

$$i = 1,2,...,s \ \forall s \in \nu_s;$$

б) $$\eta_i \eta_j D^+v_{ij}(x_i, x_j) \le p_{2i}(s)\|x_i\|^2 + (p_{2ij} + p_{3ij}(s))\|x_i\|\|x_j\|$$

$$\forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{jx0} \ i, j = 1,2,...,s \ i \neq j, \ \forall s \in \nu_s;$$

где $p_{1i}, p_{2i}(s)$ - максимальные собственные значения матриц

$$\eta_i^2(B_{ii}A_i + A_i^T B_{ii}), \ \sum_{j=1}^{i-1}\eta_i\eta_j(B_{ji}^T S_{ji}A_{ji} + (S_{ji}A_{ji})^T B_{ji}) + \sum_{j=1+1}^{s}\eta_i\eta_j(B_{ij}^T S_{ji}A_{ji} +$$

$$+ (S_{ji}A_{ji})^T B_{ij}), \ \ i, j = 1,2,...,s, \ i \neq j$$

соответственно; $p_{1ij}(s), \ p_{2ij}, \ p_{3ij}(s)$ нормы матриц

$$\frac{1}{2}\eta_i^2(B_{ii}S_{ij}A_{ij} + (S_{ij}A_{ij})^T B_{ii}), \ \ \eta_i\eta_j(A_i^T B_{ij} + B_{ij}A_j), \ \sum_{k=1}^{i-1}\eta_k(\eta_k B_{ki}^T S_{kj}A_{kj} +$$

$$+ (S_{kj}A_{kj})^T \eta_j B_{kj}) + (S_{kj}A_{kj})^T \eta_j B_{kj}) + \sum_{k=i+1}^{j-1}\eta_k(\eta_i B_{ik}^T S_{kj}A_{kj} + (S_{ki}A_{ki})^T \eta_j B_{kj} +$$

$$+ \sum_{k=j+1}^{s}\eta_k(\eta_i B_{ik}^T S_{kj}A_{kj} + (S_{ki}A_{ki})^T \eta_j B_{jk}), \ \ i, j = 1,2,...,s, \ i \neq j$$

соответственно.

Доказательство. Пусть для системы (1) построена матрица-функция (2) с элементами (3). Тогда имеем

$$\eta_i^2 D^+v_{ii}(x_i) = \eta_i^2(\dot{x}_i)^T B_{ii}x_i + \eta_i^2 x_i^T B_{ii}\dot{x}_i = \eta_i^2(A_i x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} S_{ij}A_{ij}x_j)^T B_{ii}x_i +$$

$$+ \eta_i^2 x_i^T B_{ii}(A_i x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} S_{ij}A_{ij}x_j) = \eta_i^2 x_i^T A_i^T B_{ii}x_i + \eta_i^2 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} x_i^T (S_{ij}A_{ij})^T B_{ii}x_i +$$

$$+ \eta_i^2 x_i^T B_{ii}A_i x_i + \eta_i^2 \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} x_i^T B_{ii}S_{ij}A_{ij}x_j = x_i^T \eta_i^2(B_{ii}A_i + A_i^T B_{ii})x_i + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} x_i^T \frac{1}{2}\eta_i^2(B_{ii}S_{ij}A_{ij} +$$

$$+ (S_{ij}A_{ij})^T B_{ii})x_j \le p_{1i}\|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} p_{1ij}(s)\|x_i\|\|x_j\|$$

$$\forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{jx0}, \qquad \forall (s) \in \Im_s.$$

Лемма 3. Если выполняются оценки а), б) из леммы 2, то полная производная (7) функции (5) в силу системы (1) оценивается неравенством

$$D^+v(x) \le u^T G(s)u \quad \forall x \in N_{x0}, \quad \forall s \in \nu_s, \quad (8)$$

где $G(s) = [\sigma_{ij}(s)]$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = 1,2,...,s$, $\sigma_{ii}(s) = p_{1i} + p_{2i}(s)$, $i = 1,2,...,s$, $s \in \Im_s$;

$$P_{ij}(s) = \frac{1}{2}(p_{1ij}(s) + p_{1ji}(s) + p_{2ij}(s) + p_{3ij}(s) + p_{2ji} + p_{3ji}(s)), \quad i, j = 1,2,...,s, \ i \ne j, \ s \in \Im_s.$$

Теорема. Пусть система (1) такова, что

1) в области $N_x = N_{1x} \times N_{2x} \times ... \times N_{sx}$ существует матрица-функция $U : N_x \to R^{s\times s}$ с элементами (3);

2) матрица A- положительно-определенная;

3) существует определенно-отрицательная матрица $G \in R^{s\times s}$ такая, что для матрицы G(s) выполняется оценка

$$G(s) \le G \quad \forall s \in \Im_s.$$

Тогда состояние равновесия x=0 системы (1) асимптотически устойчиво в целом на $\Im_s$.

Замечание. Если в системе (1) отсутствуют структурные возмущения, т.е. $S_{ij} = I$, то для полной производной функции (5) в силу системы (1) целесообразно применять следующую оценку

$$D^+v(x) \le \sum_{i=1}^{s} \lambda_M(c_{ii})\|x_i\|^2 + 2\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=2 \\ i<j}}^{s} \lambda_M^{\frac{1}{2}}(c_{ij}c_{ij}^T)\|x_i\|\|x_j\| \quad \forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{jx0},$$

где $c_{ii} = \eta_i^2(B_{ii}A_i + A_i^T B_{ii}) + \sum_{j=1}^{i-1}\eta_i\eta_j(A_{ji}^T B_{ji} + B_{ji}^T A_{ji}) + \sum_{j=i+1}^{s}\eta_i\eta_j(B_{ij}A_{ij} + A_{ij}^T B_{ij}^T),$

$i, j = 1,2,...,s;$

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\eta_i^2(B_{ii}A_{ij} + A_{ij}^T B_{ii}) + \eta_i\eta_j(A_i^T B_{ij} + B_{ij}A_j) + \sum_{k=1}^{i-1}\eta_k(\eta_k B_{ik}^T A_{kj} + A_{ki}^T B_{kj}) +$$

$$+ \sum_{k=i}^{j-1}\eta_k(\eta_i B_{ik}^T A_{kj} + A_{ki}^T \eta_j B_{kj}) + \sum_{k=j}^{s}\eta_k(\eta_i B_{ik}^T A_{kj} + A_{ki}\eta_j B_{jk}),$$

$$i = 1,2,...,s-1; \quad j = 2,3,...,s; \ i < j; \ c_{ij} = c_{ji}, \quad i, j = 1,2,...,s, \quad i \ne j.$$

В этом случае матрица G имеет вид:

где $\overline{\sigma}_{ii} = \lambda_M(c_{ii})$, $\overline{\sigma}_{ij} = \lambda_M^{\frac{1}{2}}(c_{ij}c_{ij}^T)$ -максимальные собственные значения матриц c_{ii}, $\lambda_M^{\frac{1}{2}}(c_{ij}c_{ij}^T)$ - нормы матриц $c_{ij}, i, j = 1,2,...,s$.

Пример. Рассмотрим линейную систему четвертого порядка, состоящую из двух подсистем второго порядка :

$$\frac{dx_1}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & -2 \end{bmatrix}x_1 + \begin{bmatrix} s_{21} & 0 \\ 0 & s_{21} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}5 & 1 \\ -1 & 0{,}5 \end{bmatrix}x_2,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0{,}5 & -3 \end{bmatrix}x_2 + \begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}1 & -1 \\ 1 & 0{,}1 \end{bmatrix}x_1, \quad x_i \in R^2, \ i = 1,2. \quad (9)$$

Структурные матрицы S, S_i, s_{ij}, $i, j = 1,2$ имеют вид:

$$S = diag\{S_1, S_2\}, \quad S_1 = [Is_{12}], \quad S_2 = [s_{21}I],$$
$$s_{12} = s_{21}I_2, \; s_{21} = s_{11}I_2, \; I_2 = diag\{1,1\}.$$

Структурное множество $\Im_s$ определяется формулой

$$\Im_s = \{s : 0 \le s \le I_4\}, \; I_4 = diag\{1,1,1,1\}.$$

Построим матрицу-функцию для системы (9) с элементами

$$v_{ii}(x_i) = x_i^T diag\{2,2\}x_i, \quad i = 1,2;$$
$$v_{12}(x_1, x_2) = v_{21}(x_2, x_1) = x_1^T diag\{0,1;0,1\}x_2.$$

Для этой функции выполняются оценки

$$v_{ii}(x_i) \ge 2\|x_i\|^2 \qquad \forall x_i \in N_{ix0}, \quad i = 1,2;$$
$$v_{12}(x_1, x_2) \ge -0,1\|x_1\|\|x_2\| \quad \forall (x_1, x_2) \in N_{1x0} \times N_{2x0}.$$

Если $\eta^T = (1,1)$, то матрица А имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -0,1 \\ -0,1 & 2 \end{bmatrix}$$

и является положительно-определенной.
Элементы матриц G(s) такие:

$$\sigma_{11}(s) = -2 + 0,002s_{11}; \; \sigma_{22}(s) = -3,59 + 0,1s_{21}; \quad \sigma_{12}(s) = 0,274 + 0,1s_{11} + 0,5s_{21}.$$

При таком определении элементов матриц G(s) имеем

$$G(s) \le G = \begin{bmatrix} -1,98 & 0,874 \\ 0,847 & -3,49 \end{bmatrix}$$

Матрица G- отрицательно-определенная.
Итак, состояние равновесия x=0 системы (9) асимптотически устойчиво в целом на $\Im_s$.

Литературы

1. Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. - Киев: Наукова думка, 1984. - 307 с.
2. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. К теория устойчивости крупно масштабных систем при структурных возмущениях // Автоматика. -1991. – № 6. - С. 10-14.
3. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема А. // Электронное моделирование. - 1992. - 14, №1. - С.3-10
4.Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема Б. // Электронное моделирование. - 1992. - 14, № 4. - С.35-42

Андижон давлат университети
2010 йил 6 сентябрда қабул қилинган