О ВОЗМОЖНОСТИ ПОИМКИ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ СЧЕТНОЙ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.М.Муминов, Н.Т.Умрзаков

Саноқли дифференциал тенгламалар системаси билан ифодаланган кўп қатнашчилар қатнашган дифференциал ўйин масаласи кўриб чиқилган. Ўйинчиларнинг бошқарувларига турли чекланишлар қўйилган бўлиб, қаралаётган ўйинда қувишни чегараланган вақтда тугаллаш мумкинлиги кўрсатилган.

The problem of differential game with many pursuers explained by finite number differential equation systems are spoken about.

1.**Введение.** Изучение дифференциальных игр со многими преследующими при наличии интегральных и геометрических ограничений на управления игроков посвящено много исследований [1-6].

Ранее используя метод декомпозиции, было найдено решение задачи в случае одного преследующего при наличии геометрических ограничений.

В данной работе рассматривается более общая задача преследования со многими преследующими при наличии геометрическими ограничения на управления преследующих и интегральные ограничения на управления убегающих играков. Показано условия завершения игры в задаче преследования за конечные промежутки времени. Работа продолжает исследований [1-5].

2.Постановки задачи. Пусть дано некоторая последовательность положительных чисел $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$. Введем рассмотрение следующего пространство

$$l_r^{\,2}=\left\{\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...):\ \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\,r}\alpha_i^{\,2}\right\}$$

со скалярным произведением и нормой

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\,r}\alpha_i\beta_i\,,\ \alpha,\beta\in l_r^{\,2},\quad |\alpha|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\,r}\alpha_i^{\,2}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую счетной системой дифференциальных уравнений

$$\dot z_i=-\lambda_i z_i-u_i+v_i,\ z_i(t_0)=z_{i0},\ i=1,2,... \quad (1)$$

где $z_i,u_i,v_i,t_0,z_{i0}\in R^1,\quad z_0=(z_{10},\,z_{20},\,...)\in l_r$, $u=(u_1,u_2,...)$ – параметр управления преследующего, $v=(v_1,v_2,...)$ параметр управления убегающего.

При этом $u(\cdot),v(\cdot)\in L_2\left(t_0,T_0;l_r^{\,2}\right)$, где T_0 – конечное положительное число,

$$L_2\left(t_0,T_0;l_r^{\,2}\right)=\left\{\ f(t)=\left(f_1(t),,\,f_2(t),...\right):\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\,r}\int_{t_0}^{T_0}\left|f_i(t)\right|^2dt<\infty\right\},$$

т.е. пространство состоящее из суммируемых с квадратом измеримых функций на $[t_0;T_0]$ со значениями в $l_r^{\,2}$.

Определение 1. Функция $u(t)=(u_1(t),u_2(t),...)$ удовлетворяющая условию

$$|u(t)|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\,r}u_i^{\,2}(t)\right)^{1/2}\le\rho,\ t\in[t_0;T_0],$$

где $\rho-$ заданное фиксированное положительное число, называется допустимым управлением преследующего.

Определение 2. Функция $v(t)=(v_1(t),v_2(t),\ldots)$ удовлетворяющая условию

$$\|v(t)\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\,r}\int_{t_0}^{T_0}|v_i(t)|^2\,dt\right)^{1/2}=\left(\int_{t_0}^{T_0}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i^{\,r}|v_i(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\le\sigma,$$

где $\sigma-$ заданное фиксированное положительное число, называется допустимым управлением убегающего.

Определение 3. Пусть

$$\omega(t)=(\omega_1(t),\ \omega_2(t),\ldots)\in L_2\left(t_0,T_0;l_r^{\,2}\right),\ z_0\in l_r^{\,2}.$$

Функция $z(t)=(z_1(t),z_2(t),\ldots)$, где

$$z_i(t)=z_{i0}e^{-\lambda_i(t-t_0)}+\int e^{-\lambda_i(t-\tau)}\omega_i(r)dr,\ t\in[t_0;T_0]$$

называется решением системы уравнений

$$\dot z_i=-\lambda_i z_i+\omega_i(t),\ z_i(t_0)=z_{i0},\ i=1,2,\ldots$$

если $z_i(t)\in C\left(t_0,T_0;l_r^{\,2}\right)$, где $C\left(t_0,T_0;l_r^{\,2}\right)-$ пространство непрерывных функций на $[t_0;T_0]$ со значениями в $l_r^{\,2}$.

Определение 4. Будем говорить, что в игре (1) из начального положения $z_0=(z_{10},z_{20},\ldots),\ z_{i0}\in R^1,i=1,2,\ldots$ возможно завершить преследования за конечное время $T,\ t_0<T\le T_0$, если можно выбрать допустимое управление преследующего $u(t)$ таким образом, что для любых допустимых управлений убегающего $v(t)$, для решений $z(t)$ системы

$$\dot z_i=-\lambda_i z_i-u_i+v_i,\ z_i(t_0)=z_{i0},\ i=1,2,\ldots$$

имеет место равенство $z(T)=(0,0,\ldots,0)$.

3. **Достаточные условия завершения игры.** Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Можно завершить преследования в игре (1) за время

$$T_0=\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{\rho}+\sqrt{\frac{\sigma^2}{\rho^2}+\frac{4|z_0|}{\rho}}\right)^2+t_0\ .$$

Доказательство. Пусть убегающий выбирает свое допустимое управление произвольным образом в виде

$$v(t)=(v_1(t),v_2(t),\ldots)$$

Рассмотрим следующую функцию

$$t(\alpha)=t_1+\frac{1}{\rho}\int_{t_0}^{\alpha}|v(t)|dt\ ,\ t_0\le\alpha\le T_0,\qquad(2)$$

где $t_1=\dfrac{|z_0|}{\rho}+t_0$.

Поскольку $|v(t)|$ принимает конечное положительное значение, то функция $t(\alpha)$ непрерывна и монотонно возрастает на отрезке $t_0\le\alpha\le T_0$. В силу $t(t_0)=t_1>t_0$ на достаточно малой правой

окрестности точки t_0 выполнено неравенство $t(\alpha)>\alpha$. Но это неравенство нарушается в отрузке $[t_0;T_0]$, то есть существует такое значение аргумента $t_2\in[t_0;T_0]$, для которого выполнено равенство $t(t_2)=t_2$. Действительно, если предположим что неравенство $t(\alpha)>\alpha$ не нарушается, то

$$T_0<t_1+\frac{1}{\rho}\int_{t_0}^{T_0}|v(s)|ds\le t_1+\frac{1}{\rho}\sqrt{T_0-t_0}\cdot\sqrt{\int_{t_0}^{T_0}|v(s)|^2ds}\le t_1+$$

$$+\frac{1}{\rho}\sqrt{T_0-t_0}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^r\int_{t_0}^{T_0}|v_i(s)|^2ds}\le t_1+\frac{\sigma}{\rho}\sqrt{T_0-t_0}$$

Отсюда

$$(T_0-t_0)-\frac{\sigma}{\rho}\sqrt{T_0-t_0}-t_1+t_0<0,$$

или

$$(T_0-t_0)-\frac{\sigma}{\rho}\sqrt{T_0-t_0}-\frac{|z_0|}{\rho}<0, \tag{3}$$

В силу

$$0<\sqrt{T-t_0}<\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\rho}+\frac{1}{\rho}\sqrt{\sigma^2+4\rho|z_0|}\right)$$

число

$$T_0=t^0+\frac{1}{4\rho^2}\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\rho|z_0|}\right)^2$$

неудовлетворяет неравенству (3). Отсюда неравенство $t(\alpha)>\alpha$ нарушается на полуинтервале $]t_0;T_0]$, т.е. $t(t_2)=t_2$.

С другой стороны из (2) имеем

$$\frac{dt(\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\rho}|v(\alpha)|.$$

Отсюда

$$|v(\alpha(t))|\cdot\dot{\alpha}(t)=\rho. \tag{4}$$

Решение $\alpha(t)$, $t_1\le t\le t_2$ уравнение (4) с начальным условиям $\alpha(t_1)=t_0$ есть обратная функция к функцию $t(\alpha)$ и удовлетворяет равенству $\alpha(t_2)=t_2$. Поэтому в силу свойства обратных функций функция $\alpha(t)$ является монотонно возрастающей непрерывной функцией на отрезке $[t_1;t_2]$.

Функция управления $u(t)$ преследующего выберем следующим образом

$$u(t)=\begin{cases}\dfrac{\rho}{|z_0|}\left(e^{-\lambda(t-t_0)}z_{10},e^{-\lambda(t-t_0)}z_{20},\ldots\right), & t_0\le t<t_1;\\ e^{-\lambda_1(t-\alpha(t))}v_1(\alpha(t))\cdot\dot{\alpha}(t),e^{-\lambda_2(t-\alpha(t))}v_2(\alpha(t))\cdot\dot{\alpha}(t),\ldots, & t_1\le t\le t_2;\\ (0,0,\ldots), & t_2<t\le T_0.\end{cases}$$

Покажем, что управления $u(t)$ преследующего допустимой, т.е. $u(t)\in L_2(t_0,T_0;l_r{}^2)$, а также $|u(t)|\le\rho$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{r}\cdot\int_{t_0}^{T_0}|u_i(t)|^2dt=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}\cdot\int_{t_0}^{t_1}|u_i(t)|^2dt+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}\cdot\int_{t_1}^{t_2}|u_i(t)|^2dt+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}\cdot\int_{t_2}^{T_0}|u_i(t)|^2dt=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}\cdot\int_{t_0}^{t_1}\frac{\rho}{|z_0|}\cdot e^{-2\lambda_i(t-t_0)}z_{i0}^2dt+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}\cdot\int_{t_1}^{t_2}e^{-2\lambda_i(t-\alpha(t))}v_i^2(\alpha(t))\cdot\dot\alpha^2(t)dt=$$

$$=\frac{\rho}{|z_0|}\cdot(t-t_0)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}z_{i0}^2+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}\cdot\int_{t_0}^{t_1}v_i{}^{2}(s)ds\le\frac{\rho}{|z_0|}\cdot(t-t_0)\cdot|z_0|+\sigma^2<\infty.$$

Приведенные вычисления показывает, что $u(t)\in L_2(t_0,T_0;l_r{}^2)$.

Далее а) на отрезке $t_0\le t<t_1$

$$|u(t)|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}u_i{}^{2}(t)\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}\cdot\frac{\rho^2}{|z_0|^2}\cdot e^{-2\lambda_i(t-t_0)}z_{i0}^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le\frac{\rho}{|z_0|}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}z_{i0}{}^{2}\right)^{1/2}=\frac{\rho}{|z_0|}\cdot|z_0|=\rho.$$

в) на отрезке $t_1\le t<t_2$

$$|u(t)|=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}e^{-2\lambda_i(t-\alpha(t))}v_i^2(\alpha(t))\cdot\dot\alpha^2(t)\le\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i{}^{r}v_i^2(\alpha(t))\cdot\dot\alpha^2(t)=\dot\alpha^2(t)|v(\alpha(t))|^2\le\rho^2.$$

с) на отрезке $t_2<t<T_0$ $|u(t)|=0$.

Таким образом, $|u(t)|\le\rho$ при $t\in[t_0;T_0]$.

Теперь, подставляя допустимые управления в систему уравнений (1) получим

$$\dot z_i=-\lambda_i z_i-u_i(t)+v_i(t),\ \ z_i(t_0)=z_{i0},\ \ i=1,2,...$$

Решений этой системы на отрезке $t_2<t<T_0$ имеет вид

$$z_i(t)=e^{-\lambda_i t}\left[z_{i0}e^{\lambda_i t_0}-\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_i s}u_i(s)ds+\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_i s}v_i(s)ds\right]=$$

$$=e^{-\lambda_i t}\left[z_{i0}e^{\lambda_i t_0}-\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_i s}\cdot\frac{\rho}{|z_0|}\cdot e^{-\lambda_i(s-t_0)}\cdot z_{i0}ds-\right.$$

$$\left.-\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_i s}\cdot e^{\lambda_i(s-\alpha(s))}v_i(\alpha(s))\cdot\dot\alpha(s)ds+\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_i s}v_i(s)ds\right]$$

При образовании последнего подынтегрального выражения в первом интеграле произведена замена переменных $\alpha(s)=\tau$. Поэтому в силу $\alpha(t_2)=t_2$ выполнено равенство

$$z_i(t_2)=e^{-\lambda_i t_2}\left[-\int_{t_0}^{t_2} e^{\lambda_i s}v_i(s)ds+\int_{t_0}^{t_2} e^{\lambda_i s}v_i(s)ds\right]=0.$$

Следовательно, для $t_2\in[t_0;T_0]$ в игре (1) завершится преследование.

Теорема доказана.

Литература:

[1]. Красовский Н.Н. Об одной задаче преследования. // Прикл. матем. и мех.- 1962.- т.26.- N 2.- С.218-232.

[2]. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами. // Кибернетика.- 1976.- N 3.- С.145-146

[3]. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования.- Л.: ЛГУ, 1971.- 222 с.

[4]. Сатимов Н.Ю. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх. // Кибернетика.- 1973.- N3.- С.88-93

[5]. Сатимов Н.Ю., Карабаев Э.О. Об одном методе решения задачи преследования. //Докл. АН УзССР.- 1986.- N 3.- С.7-9

[6]. Умрзаков Н.М. Об одной дифференциальной игре при различных ограничениях на управляющие параметры. //Докл. АН РУз.- 2005.- N3.- С.11-15

Андижон давлат университети
2010 йил 4 январда қабул қилинган