ОБ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СОЛНЕЧНОЙ РАДИАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

Ф.А.АЛИЕВ, Ж.И.ХУЖАЕВ

Қуёш радиацияси интенсивлигини Фурье қаторига ёйиш мисоли орқали узлуксиз қисмлардан ташкил топган даврий функцияларни аппроксимациялаш ва тригонометрик қаторнинг аппроксимация аниқлигини баҳолаш усуллари таклиф этилган.

***Калит сўзлар**: аппроксимация, Фурье катори, қуёш радиацияси, инсоляция, географик кенглик, қуёшнинг баландлиги,чиқиши ва ботиши, атмосфераниng тиниқлиги*

На примере разложения интенсивности солнечной радиации в ряд Фурье предложены способы представления и оценки точности тригонометрических полиномов, аппроксимирующих кусочно-непрерывные периодические функции.

***Ключевые слова:** аппроксимация, ряд Фурье, солнечная радиация, инсоляция, географическая широта, высота, восход и заход солнца, прозрачность атмосферы*

On the example of the expansion of solar radiation in the Fourier series, methods of presentation and evaluation of the accuracy of trigonometric polynomials, approximating a piecewise continuous periodic functions, are proposed

***Key words:** approximation, Fourier's row, solar radiation, insulation, latitude, height of the Sun, sunrise and sunset, purity of atmosphere*

«Каковы бы ни были перемены, производимые человеком, вечный круговорот времен года остается незыблемым. Лето и зима, пора сева и пора жатвы следуют друг за другом в установленном порядке с изумительной правильностью, предоставляя человеку возможность направить высокие силы своего всеобъемлющего разума на познание законов, которыми управляется это бесконечное однообразие и вечное изменение» (Дж.Ф.Купер). А знание закономерностей природных явлений, связанных с годовыми и суточными изменениями показателей окружающей среды, позволяет целесообразно использовать их с пользой и предотвратить нежелательные последствия. В связи с этим актуальными в арсенале теоретиков и практиков в последнее время становятся методы математического моделирования и вычислительный эксперимент [1, 2]. Опираясь на законы природы объекта, на результаты натурных наблюдений, а также на приближенные и аналитические методы решения задач, они позволяют изучать объекты с различной степенью сложности. Разработка математического и программного обеспечения конкретного объекта часто требует обработки первичной информации. Такой информацией при разработке математической модели процессов сушки и хранения сельскохозяйственных продуктов (хлопка-сырца, семян хлопчатника, люцерны и др.), в частности, является интенсивность солнечной радиации, которая представляет периодическую функцию. Ниже поделимся опытом представления теоретических значений этого показателя в виде ряда Фурье.

Солнечная радиация является основным источником энергии для земли. В зависимости от времен суток и года, географической широты местности и прозрачности атмосферного слоя до земли достигает энергия с разной интенсивностью. Согласно [3], в летние безоблачные дни в Ташкенте этот показатель достигает до 1,05 кВт/м^2. Не вдаваясь в подробности (законов Кеплера, географической широты местности, поглощение, рассеяние и излучение атмосферой и землей видимых, инфракрасных и ультрафиолетовых спектров излучения, законов Планка и Вина и т.д.), солнечную энергию, поступающую на землю за единичное время, можно представить в виде фрагмента синусоиды, период которой равен $\Pi = 86400\,c$, а максимум которого достигается к полудню (рис. 1).

Аппроксимируем солнечную радиацию, исходя из положений астрономической теории климата. Согласно этой теории поток солнечной радиации I_0 через единичную площадь, перпендикулярную лучам солнца, при расстоянии *r* от солнца до земли, является переменной величиной [3]

$$4\pi r^2 I_0 = 4\pi r_0^2 I_0^*, \qquad (1)$$

где r_0 = *1,4958км* – среднее расстояние от земли до солнца (r_0 = *1,528км* – в летнем, r_0 = *1,478 км* – в зимнем солнцестоянии для северного полушария); $I_0^* = 1{,}37\ кВт/м^2$ – солнечная постоянная.

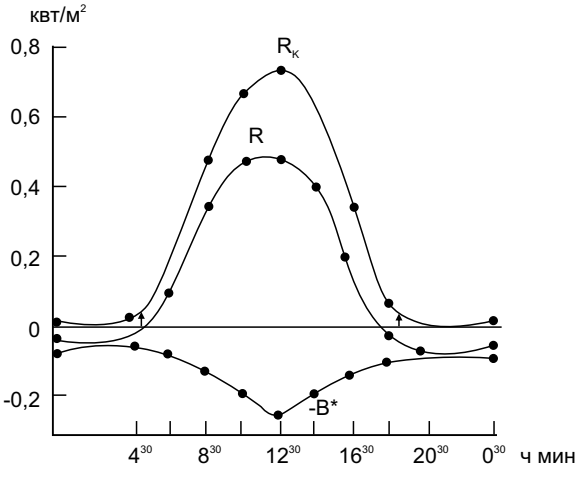

Рис. 1. **Суточный ход радиационного баланса R и его составляющие $R_к$ – приходящая часть и B_* – эффективное излучение земной поверхности. Стрелки – моменты восхода и захода Солнца [1]**

Из (1) следует, что при отсутствии земной атмосферы поток радиации составляет $I_0 = r_0^2 I_0^* / r^2$. Поток солнечной радиации I_0' в горизонтальную плоскость называется инсоляцией:

$$I_0' = I_0 \sin h_\odot, \qquad (2)$$

где $h_\odot$ – высота солнца над горизонтом.

В астрономии высота солнца определяется зависимостью

$$\sin h_\odot = \sin\varphi \sin\delta + cos\varphi \cos\delta \cos\frac{2\pi t}{\Pi}, \qquad (3)$$

где φ – географическая широта местности; δ – склонение солнца ($23{,}5^0$ – в день летнего и $-23{,}5^0$ – в день зимнего солнцестояния); t – время, отсчитываемое от полудня.

Моменты восхода и захода солнца $\pm t_0$ определяются из решения уравнения, вытекающего из (3) при условии $\sin h_\odot = 0$:

$$\cos\frac{2\pi t_0}{\Pi} = -tg\varphi tg\delta\,. \qquad (4)$$

Исследованиями установлено, что в Узбекистане годовая радиация на севере (наибольшая широта $46^0 36'$ – западный берег Аральского моря) составляет 567 *МДж/м*^{2}, а на юге (наименьшая широта $37^0 11'$ - Термез) – 670 *МДж/м*^{2}. В году наблюдается 260-280 ясных дней.

В [3] отмечено что, с определенной погрешностью и введением коэффициента γ инсоляцию можно описать формулой

$$\tilde{I}_0(t) = \gamma I_0 \sin h_\odot = \gamma \frac{r_0^2 I_0^*}{r^2}\sin h_\odot\,. \qquad (5)$$

Здесь комплекс $\gamma r_0^2 I_0^* / r^2$ отражает радиацию солнца на единичной площади земли, когда солнце находится в зените.

Таким образом, горизонтальная поверхность земли принимает солнечную радиацию в светлое время суток по закону

$$\tilde{I}_0(t) = \gamma \frac{r_0^2 I_0^*}{r^2}\left(\sin\varphi\sin\delta + cos\varphi\cos\delta\cos\frac{2\pi t}{\Pi}\right) = M + N\cos\frac{2\pi t}{\Pi},$$

где $M = \gamma\frac{r_0^2 I_0^*}{r^2}\sin\varphi\sin\delta,\ N = \gamma\frac{r_0^2 I_0^*}{r^2}cos\varphi\cos\delta.$

Исходя из этих допущений, составим зависимость поступившей солнечной энергии от времени суток

$$R(t) = \begin{cases} M + N\cos\omega t \quad при \quad -t^0 \le t \le t^0. \\ 0 \quad при \quad -\Pi/2 \le t < -t^0 \quad и \quad t^0 < t \le \Pi/2, \end{cases}$$

Здесь и далее $\omega = \frac{2\pi}{\Pi}$.

Функцию $R(t)$ представим в виде ряда Фурье [4]:

$$R(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\omega t + b_k\sin k\omega t\right). \qquad (6)$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{\Pi}\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2} R(t)\,dt = \frac{4Mt_0}{\Pi} + \frac{2N}{\pi}\sin\omega t_0,$$

$$a_1 = \frac{2}{\Pi}\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2} R(t)\cos\omega t\,dt = \frac{2N}{\Pi}t_0 + \frac{2M}{\pi}\sin\omega t_0 + \frac{N}{2\pi}\sin 2\omega t_0,$$

$$a_k = \frac{2}{\Pi}\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2} R(t)\cos k\omega t\,dt =$$

$$= \frac{2M}{k\pi}\sin k\omega t_0 + \frac{N}{(k+1)\pi}\sin(k+1)\omega t_0 + \frac{N}{(k-1)\pi}\sin(k-1)\omega t_0 \quad при\ k = 2,3,...,$$

$$b_k = \frac{2}{\Pi}\int_{-\Pi/2}^{\Pi/2} R(t)\sin k\omega t\,dt = 0 \ \text{ при } \ k = 1,2,3,...$$

Среднее квадратичное отклонение аппроксимации для одних суток при учете m_0 ($m_0 > 1$) первых частот разложения составляет

$$S_m = \frac{2}{\Pi}\int_0^{\Pi/2}\left(R(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{m} a_k \cos k\omega t\right)^2 dt = \frac{Ma_0 + Na_1}{2} - \frac{a_0^2}{4} - \sum_{k=1}^{m}\frac{a_k^2}{2}\cdot$$

Относительная погрешность вычислений по ряду тригонометрических полиномов можно оценить согласно выражению $\sqrt{S_m}/(M+N)$. При заранее заданной точности расчета данное выражение позволяет определить оптимальное количество учитываемых частот m_0.

Согласно полученным нами результатам для 42^0 северной широты в дни весеннего и зимнего равноденствия высота солнца составляет 48^0, в день летнего солнцестояния – $71^030'$, а в день зимнего солнцестояния – $24^030'$. В дни равноденствия светлое время суток составляет 12 часов, в день летнего солнцестояния – 14 часов 57 минут, а в день зимнего солнцестояния – 8 часов 56 минут (рис 2).

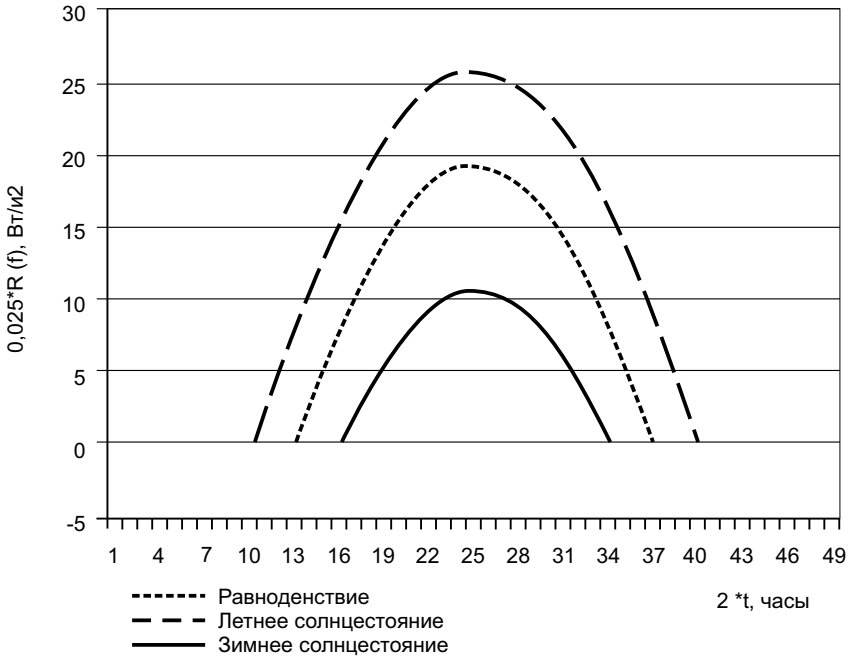

Рис. 2. **Интенсивность солнечной радиации в дни равноденствия, летнего и зимнего солнцестояния**

Квадрат отклонения аппроксимации S_m для одного периода при $m = 0$ составляет соответственно 90526.3, 159781.1 и 23592.7 в дни равноденствия, летнего и зимнего солнцестояния. При увеличении членов полинома S_m убывает: при $m = 5$: 159.7, 88.6 и 77.5; при $m = 10$: 15.3, 14.8 и 12.9; при $m = 20$: 2.2, 1.9, и 1.7.

Результаты исследования в дальнейшем будут использованы при разработке адекватной математической модели теплового состояния трехмерного объекта с учётом внутреннего тепловыделения, влагопереноса, периодического изменения температуры окружающей среды и кондуктивного теплообмена.

Литература:

1.Тихонов А.М., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1977

2. Самарский А.А., Вабищевич П.И. Вычислительная теплопередача.- М.: Едиториал УРСС, 2003

3. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы (2-е изд.) – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1984

Андижон машинасозлик институти,
ТАТУ қошидаги ДМАДМЯ маркази
(Тақризчи: т.ф.д., проф. И.Алимов)