GIPERGEOMETRIK TAQSIMOT – TAQSIMOTLAR MANBAI

A.TOXIROV, X.QO'SHAQOV, N.YUSUPOVA

В статье приводится описание гипергеометрического распределения и доказывается, что при некоторых условиях из этого в предельном случае получаются элементарные распределения теории вероятностей.

The article describes the hyper geometric distribution and the author tries to prove that under certain conditions at least it I possible to get elementary distribution of the principle of theory of probability.

Kundalik hayotimizda ko'pincha chekli sondagi narsalar ichidan birini yoki bir nechtasini ajratib olishimizga to'g'ri keladi. Bunday holatni savdo bilan bo'g'liq o'rinlarda doimo kuzatishimiz mumkin. Savdoga olib chiqilgan jami mahsulotning bir qismi bizning talablarimizga javob berishi, bir qismi esa javob bermasligi tabiiy bir hol. Shunday ekan, biz sotib olgan narsalar ichida nechtasi talablarimizga javob beradi-yu, nechtasi javob beraolmasligini o'rganish o'z-o'zidan qiziqarli ish. Ayni shunday masalalarda ehtimolliklar nazariyasida gipergeometrik taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarga ishimiz tushgan bo'ladi.

Aytaylik, biz ish ko'radigan S_0 to'plam $N_1 + N_2$ ta narsalardan tuzilgan bo'lib, ularning N_1 tasi A-ayrimlik xususiyatiga ega (ularni qisqacha A narsalar deb ataymiz), qolgan N_2 tasi esa ($\bar{A}$ narsalar) A - ayrimlik xusu-

siyatiga ega bo'lmasin. Bunda N_1 va N_2 larni musbat deb olamiz. Aytaylik, n-musbat va butun son bo'lib, $N_1 + N_2$ dan ortmasin va, shuningdek, $G(n) - S_0$ to'plamdan olingan n ta narsalarning tartibsiz birikmasi bo'lsin. Bunday tartibsiz $G(n)$ birikmalarning barchasi hosil qilgan to'plamni $S(n)$- bilan belgilaylik. Kelgusida $S(n)$ to'plamga kirgan elementlarni o'rganamiz.

Ta'rif. X tasodifiy miqdor $S(n)$ to'plamda aniqlangan, yani n ta narsalardan tarkib topgan $G(n)$ birikma tarkibidagi $A-$ narsalar soni deb qaralsa, uni *gipergeometrik o'zgaruvchi* deyiladi.

Gipergeometrik o'zgaruvchining oladigan qiymatlari go'yoki 1 dan n gacha bo'lgan barcha butun sonlar bo'lib tuyuladi. Ammo gipergeometrik miqdorning biz aytgan butun manfiymas qiymatlari 0 dan boshlanib, n bilan tugashi shart emas. Buni S_0 ni tarkibiga ko'ra X ning qiymatlariga qo'yiladigan shartlar orqali ko'rishimiz mumkin.

Modomiki, , $X - G(n)$ tarkibidagi $A-$ narsalar soni ekan, y S_0 dagi jami $A-$ narsalar soni N dan ortmasligi kerak: $X \le N_1$. Shuningdek, $n - X$ $G(n)$ tarkibidagi $\overline{A}-$ narsalar sonini bildirgani uchun, undaylarning jami soni N_2 dan ortmasligi kerak: $n - X \le N_2$. Demak, X o'zgaruvchi miqdor bir vaqtda quyidagi uchta shartni qanoatlantirishi kerak:

$$0 \le X \le n, \qquad X \le N_1, \qquad n - X \le N_2.$$

O'xirgi shartni $n - N_2 \le X$ ko'rinishida yozib olish maqsadga muvofiqdir.

X oladigan qiymatlarning haqiyqiy chegaralari yuqoridagi shartlarning qaysi biri X ni eng chegaralovchi ekaniga bog'liq. Xususan, X ning minimal qiymati ikkita

$$0 \le X \quad \text{va} \quad n - N_2 \le X$$

shartlar bilan aniqlanadi. Bu shartlarning ikkalasi ham bajarilishi uchun X ning olishi mumkin bo'ladigan qiymati X ni quyidan chegaralovchi 0 va $n - N_2$ sonlarning kattasidan boshlanishi kerak. Yani, $n \le N_2$ bo'lganida $X = 0,1, \ldots$ dan, bo'lganida $X = n - N_2; n - N_2 + 1; \ldots$ kabi

Endi X ning qiymatlari to'plamini yuqoridan chegaralovchi shartlarni ko'rib o'tamiz. Ular ikkita:

$$X \le n \quad \text{va} \quad X \le N_1.$$

Har ikkala shart birlikda bajarilishi uchun X qabul qiladigan eng katta son X ni yuqoridan chegaralovchi sonlarning kichigidan iborat bo'ladi, yani

$n \le N_1$ bo'lsa, $X = 0,1, \ldots, n$
$n > N_1$ bo'lsa, $X =, \ldots, N_1$

X qabul qiladigan qiymatlarning eng kichigi va eng kattasiga nisbatan yuqorida aniqlanganlarga ko'ra quyidagi to'rt holga ega bo'lamiz:

1-hol. Agar $n \le \min(N_1, N_2)$ bo'lsa, u holda X qabul qiladigan qiymatlar $0, 1, 2, \ldots, n$ bo'ladi.

2-hol. Agar $N_2 < n \ll N_1$ bo'lsa, u holda X qabul qiladigan qiymatlar $n - N_2, n - N_2 + 1, \ldots, n$ bo'ladi.

3-hol. Agar $N_1 < n \ll N_2$ bo'lsa, u holda X qabul qiladigan qiymatlar $0, 1, 2, \ldots, N_1$ bo'ladi

4-hol. Agar $n > \max(N_1, N_2)$ bo'lsa, u holda X qabul qiladigan qiymatlar $n - N_2, n - N_2 + 1, \ldots, N$ bo'ladi.

Aytaylik, $k - X$ oladigan qiymat bo'lsin. Bu holda yuqoridagi 4 ta holning qay biri bajarilishidan qat'i nazar

$$P_X(k \mid N_1, N_2, n) = P(X = k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_{N_1+N_2}^n}$$

bo'lib, bu ehtimollik $N_1, N_2 \; va \; n$ larga bo'g'liq bo'ladi. $P(X = k)$ gipergeometrik taqsimot uchun aniqlangan formuladan ko'rinadiki, agar $N_1, N_2 \; va \; n$ sonlarning har uchalasi yoki ularning ba'zilari katta sonlar bo'lganida, bu formuladan foydalanish qiyin bo'ladi. Shuning uchun bu formula aniqlovchi miqdorga yaqin va, shu bilan birga, hisoblashga qulayroq boshqa formulani izlash maqsadga muvofiqdir. Bunday formulani S_0

to'plamdagi elementlarning jami soni $N = N_1 + N_2$ yetarli katta, $G(n)$ guruhni tashkil qiluvchi narsalar soni n esa uncha katta bo'lmaganida, hamda S_0 to'plam tarkibidagi A – narsalarning ulushi

$$p = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

0 ga ham, 1 ga ham yaqin bo'lmaganida, hosil qilish mumkin ekan. Yuqorida kiritilgan belgilashlarda

$$N_1 = pN, \qquad N_2 = N - N_1 = (1-p)N$$

bo'lgani sababli, gipergeometrik taqsimot

$$P_X = (k|\ N_1, N_2, n) = P_X(k|\ pN, (1-p)N, n)$$

ko'rinishga keladi.

Teorema. Agar gipergeometrik taqsimotda $n\ va\ k$ hamda S_0 to'plam tarkibidagi A – narsalarning ulushi p lar tayin qolib, S_0 ni tashkil qilgan narsalarning jami soni N cheksiz ortib borsa,

$$\lim_{N\to\infty} P(X = k) = \lim_{N\to\infty} P_X(k|\ pN, (1-p)N, n) = C_n^k p^k (1-p)^k$$

bo'ladi.

Teoremaning isboti esa

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^k (N-k)}{N!} = 1$$

tenglikdan osongina kelib chiqadi.

Demak, binomial taqsimot gipergeometrik taqsimotning limit shakli ekan.

Binomial taqsimotda ham n yetarlicha katta bo'lganida, hisoblash ma'lum qiyinchiliklarga olib keladi. Bu holdagi qiyinchiliklarni bartaraf qilish uchun binomial taqsimotda $np = \lambda$ deb olib va unda $\lambda\ va\ k$ lar o'zgarishsiz qoladi deb hisoblab, $n \to \infty$ dagi limitga o'tsak,

$$P(X = k) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

bo'lib, bu esa Puasson taqsimoti binomial taqsimotning limiti ekanligidir.

O'z navbatida, Puasson taqsimoti ko'rsatkichli taqsimotni keltirib chiqaradi va aksincha. Shuningdek, normal taqsimot ham binomial taqsimotning limit shakli ekanligini nazarda tutadigan bo'lsak, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistkada ko'riladigan asosiy taqsimotlar uchun gipergeometrik taqsimot – taqsimotlar manbai ekanligiga shubha qilmaymiz.

Андижон давлат университети,
2013 йил 22 мартда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. В.Миладжонов)