АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ ТИПА ЛУРЬЕ ПРИ СТРУКТУРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ.

В.Г.МИЛАДЖАНОВ, Р.В.МУЛЛАЖОНОВ, Ш.Н.АБДУГАППАРОВА, Д.ГАЙМАТОВА

Ушбу ишда Лурье типидаги йирик масштабли системалар асимптотик турғунлигининг етарли шартлари ҳосил қилинган.

In this article the author could manage to form the sufficient conditions of asymptotic stability of a class of Lure's large scale systems.

Развитие концепции матричной функции Ляпунова (МФЛ) позволяет расширить границы применимости прямого метода Ляпунова при исследовании абсолютной устойчивости крупномасштабных систем, подверженных структурным возмущениям. Это обусловлено некоторым развитием алгоритма построения скалярной функции Ляпунова на основе матриц-функций путем привлечения более широкого класса функций в качестве компонента для скалярной функции Ляпунова. При этом структура матричной функции такова: диагональные элементы соответствуют свободным подсистемам, а недиагональные элементы строятся на основе функций связей между изолированными подсистемами. Достаточные условия устойчивости формулируются при этом в терминах знакоопределенности специальных матриц либо условий знакоопределенности матриц в неотрицательных конусах.

В данной работе для анализа абсолютной устойчивости КМС при структурных возмущениях построена специальная функция Ляпунова на основе матричной функции. Это позволило получить достаточные условия структурно абсолютной устойчивости [1] состояния равновесия рассматриваемой системы. Общие результаты иллюстрируются численным примером.

1.Оценки МФЛ в задаче о структурной абсолютной устойчивости.

Рассмотрим крупномасштабную систему типа систем Лурье декомпозированную на s подсистем

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{l=1}^{s} S_{il}^{(1)} A_{ie} x_e + \sum_{l=1}^{s} S_{ie}^{(2)} q_{ie} f_{ie}(\sigma_{ie}), \qquad (1)$$
$$\sigma_{ie} = C_{ie}^{T} x \quad , i = 1,2,...,s,$$

где

$\sigma_{ie}^{-1} f_{ie}(\sigma_{ie}) \in [0, k_{ie}] \subseteq R_{+}$, A_{ie} – постоянные матрицы,

$x_i \in R^{ni}$, $n_1 + n_2 + ... + n_s = n$, k_{ie} - постоянные.

Здесь все матрицы и векторы соответствующей размерности, причем

$S_{ie}^{(1)}$ u $S_{ie}^{(2)}$ диагональные матрицы.

С помощью структурных матриц

$$S_i = \begin{vmatrix} S_{i1}^{(1)} & S_{i2}^{(1)} \cdots S_{ii-1}^{(1)} & I & S_{ii+1}^{(1)} \cdots S_{is}^{(1)} \\ S_{i1}^{(2)} & S_{i2}^{(2)} \cdots S_{ii-1}^{(2)} & I & S_{ii+1}^{(2)} \cdots S_{is}^{(2)} \end{vmatrix} ;$$

$$S = diag\{S_1, S_2, ..., S_s\},$$

структурное множество определяется формулой

$$\Phi_s = \{S : 0 \le S_{ie}^{(k)} \le I, S_{ii}^{(1)} = I,\ i, l = 1,2,...,s,\ k = 1,2\},$$

где I- единичная матрица соответствующей размерности.

Независимые подсистемы, соответствующие системе (1), получаются подстановкой вектора x^i вместо x:

$$\frac{dx_i}{dt} = A_{ii}x_i + S_{ii}^{(2)}q_{ii}f_{ii}(\tilde{\sigma}_{ii}), \qquad (2)$$

где

$$\tilde{\sigma}_{ii} = c_{ii}^T x^i = (o^T, o^T, ..., o^T, x_i^T, o^T, ..., o^T)^T \in R^n,\ i \in [1, s].$$

Введем следующие обозначения:

$$f_i(x^i) = A_{ii}x_i + S_{ii}^{(2)}q_{ii}f_{ii}(\tilde{\sigma}_{ii}); \tilde{\sigma}_{ii} = c_{ii}^T x^i;\ \ i \in [1, s],$$

$$f_i^*(x, s) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l \neq i)}}^{s} S_{ie}^{(1)}A_{ie}x_e + \sum_{l=1}^{s} S_{ie}^{(2)}q_{ie}f_{ie}(\sigma_{ie}) + S_{ii}^{(2)}q_{ii}[f_{ii}(\sigma_{ii}) + f_{ii}(\tilde{\sigma})];$$

$$\sigma_{ie} = c_{ie}^T x; \qquad i \in [1, s].$$

При этом система (1) примет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x^i) + f_i^*(x, s), \qquad (3)$$

Вместе с системой (1) и подсистемами (2) будем рассматривать матрицу-функцию

$$U(x) = [v_{ij}(x_i, x_j)],\ \ v_{ij} = v_{ji},\ i, j = 1,2,...,s \qquad (4)$$

с элементами

$$v_{ii}(x_i) = x_i^T B_{ii} x_i, \quad i = 1,2,...,s$$

$$v_{ij}(x_i, x_j) = v_{ji}(x_j, x_i) = x_i^T B_{ij} x_j, \qquad i = 1,2,...,s-1,\ j = 2,...,s;\ i > j, \qquad (5)$$

где $B_{ii},\ i = 1,2,...,s$ -симметрические положительно-определенные матрицы, $B_{ij},\ i = 1,2,...,s-1,\ j = 2,3,...,s;\ i < j$ постоянные матрицы.

Нетрудно проверит, что для функций (5) верны оценки :

$$\lambda_m(B_{ii})\|x_i\|^2 \le v_{ii}(x_i) \le \lambda_M(B_{ii})\|x_i\|^2 \quad \forall x_i \in N_{ix0},\ i = 1,2,...,s$$

$$-\lambda_M^{\frac{1}{2}}(B_{ij}B_{ij}^T)\|x_i\|\|x_j\| \le v_{ij}(x_i, x_j) \le \lambda_M^{\frac{1}{2}}(B_{ij}B_{ij}^T)\|x_i\|\|x_j\| \qquad (6)$$

$$\forall (x_i, x_j) \in N_{ix0} \times N_{jx0}, i = 1,2,...,s-1;\ \ j = 2,3,...,s,\ \ i < j,$$

где $\lambda_m(B_{ii})$ и $\lambda_M(B_{ii})$ - минимальные и максимальные собственные числа матриц $B_{ij},\ i = 1,2,...,s-1;\ j = 2,3,...,s;\ i < j$ соответственно.

С помощью матрицы-функции (4) и вектора $\eta \in R_+^s,\ \eta_i > 0,\ i = 1,2,...,s$ введем функцию

$$V(x) = \eta^T U(x)\eta. \qquad (7)$$

Лемма 1. Если элементы (5) матрицы-функции (4) удовлетворяют оценкам (6), то функция (7) удовлетворяет двухсторонней оценке

$$u^T H^T A H u \le V(x) \le u^T H^T B H u, \qquad (8)$$

где

$$u^T = (\|x_1\|, \|x_2\|, ..., \|x_s\|),\ H = diag\{\eta_1, \eta_2, ..., \eta_s\},\ A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}],\ i, j = 1,2,...,s,$$

$$a_{ii} = \lambda_m(B_{ii}),\ \ b_{ii} = \lambda_M(B_{ii})\ \ i = 1,2,...,s,$$

$$a_{ij} = -b_{ij} = -\lambda_M^{\frac{1}{2}}(B_{ij}B_{ij}^T) \quad i = 1,2,...,s-1; j = 2,...,s, \; i < j;$$
$$a_{ij} = a_{ji}; \; b_{ij} = b_{ji}, \; i \neq j.$$

Вместе с функцией (7) рассматривается ее полная производная

$$D^+V(x) = \eta^T D^+U(x)\eta \qquad (9)$$

Лемма 2. Если вдоль решений системы (1) построена матрица-функция (4) с элементами (5), то для производных Дини функций (5) вдоль решений системы (1) выполняются оценки:

а) $\eta_i^2 (D^+_{x_i} v_{ii})^T f_i(x^i) \le \rho_i^{(1)}(s)\|x_i\|^2 \qquad \forall x_i \in N_{ixo}, \qquad i \in [1,s];$

б)
$$\sum_{i=1}^{s} \eta_i^2 (D^+_{x_i} v_{ii})^T f_i^*(x,s) + 2\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=2 \\ j\rangle i}}^{s} \eta_i\eta_j \{(D^+_{x_i} v_{ij})^T (f_i(x^i) + f_i^*(x,s)) + (D^+_{x_j} v_{ij})^T (f_j(x^j) +$$
$$+ f_j^*(x,s)) \le \sum_{i=1}^{s} \rho_i^{(2)}(s)\|x_i\|^2 + 2\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=2 \\ j\rangle i}}^{s} \rho_{ij}(s)\|x_i\|\|x_j\|, \quad \forall \; (x_i, x_j, s) \in N_{ix_0} \times N_{jx_0} \times \Phi_s,$$

где $\rho_i^{(k)}(s), \; k = 1,2; \; i \in [1,s]$ – максимальные собственные числа матриц

$$\eta_i^2[P_{ii}A_{ii} + A_{ii}^T P_{ii} + P_{ii}S_{ii}^{(2)}q_{ii}K_{ii}^*(C_{ii}^i)^T + (S_{ii}^{(2)}q_{ii}k_{ii}^*(c_{ii}^i)^T)^T P_{ii}];$$
$$\sum_{l=1}^{i-1} \eta_i\eta_e \{[(S_l^{(1)}A_{li})^T + (S_{li}^{(2)}q_{li}k_{li}^*(c_{li}^i)^T)^T]P_{li} + P_{li}^T[S_{li}^{(1)}A_{li} + S_{li}^{(2)}q_{li}k_{li}^i(c_{li}^i)^T]\} +$$
$$+ \sum_{l=i+1}^{s} \eta_i\eta_l \{p_{il}[S_{li}^{(1)}A_{li} + S_{li}^{(2)}q_{li}k_{li}^*(c_{li}^i)^T] + [(S_{li}^{(1)}A_{li})^T + (S_{li}^{(2)}q_{li}k_{li}^*(c_{li}^i)^T)^T]P_{il}^T\} +$$
$$+\eta_i^2[p_{ii}s_{ii}^{(2)}q_{ii}k_{ii}^*(c_{ii}^i)^T + (S_{ii}^{(2)}q_{ii}k_{ii}^*(c_{ii}^i)^T)^T P_{ii}]$$

соответственно, $\rho_{ij}(s), \; i\langle j, \quad i = 1,2,...,s \quad j = 2,3,...,s \quad j = 2,3,...,s$ – нормы матриц

$$\sum_{l=1}^{j-1} \eta_j\eta_l[(S_{li}^{(1)}A_{li})^T + (S_{li}^{(2)}q_{li}k_{li}^*(c_{li}^i)^T)^T]p_{lj} + \sum_{l=j+1}^{s} \eta_j\eta_l[(S_{li}^{(1)}A_{li})^T +$$
$$+(S_{li}^{(2)}q_{li}k_{li}^*(c_{li}^i)^T)^T]p_{li}^T + \sum_{l=1}^{i-1} \eta_i\eta_l p_{li}^T[S_{lj}^{(1)}A_{lj} + S_{lj}^{(2)}q_{lj}k_{lj}^*(c_{lj}^j)^T] +$$
$$\sum_{l=i+1}^{s} \eta_i\eta_l p_{il}[S_{lj}^{(1)}A_{lj} + S_{lj}^{(2)}q_{lj}k_{lj}^*(c_{lj}^j)^T] + \frac{1}{2}\eta_i^2\{p_{ii}(S_{ij}^{(1)}A_{ij}) + (S_{ij}^{(1)}A_{ij})^T p_{ii} +$$
$$p_{ii}(S_{ij}^{(2)}q_{ij}k_{ij}^*(C_{ij}^j)^T) + (S_{ij}^{(2)}q_{ij}k_{ij}^*(c_{ij}^j)^T)^T p_{ii} + p_{ii}(S_{ii}^{(2)}q_{ii}k_{ii}^*(c_{ii}^j)^T) + (S_{ii}^{(2)}q_{ii}k_{ii}^*(c_{ii}^i)^T)^T p_{ii}\} +$$
$$+\frac{1}{2}\eta_j^2\{p_{ji}(S_{ji}^{(1)}A_{ji}) + (S_{ji}^{(1)}A_{ji})^T p_{ij} + p_{jj}(S_{ji}^{(2)}q_{ji}k_{ji}^*(c_{ji}^i)^T) + (S_{ji}^{(2)}q_{ji}k_{jj}^*(c_{jj}^i)^T)^T p_{jj}\}$$

соответственно, здесь

$$k_{ij}^* = \begin{cases} k_{ij} & \textit{при} \qquad \sigma_o(S_{ij}^{(r)}q_{ij})^T p_{ij} x_j > 0, \; i,j = 1,2,...,s; \quad r = 1,2; \\ 0 & \textit{в остальных случаях}; \end{cases}$$

$$k_{ii}^{**} = \begin{cases} k_{ii} & \textit{при} \qquad \sigma_o(S_{ii}^{(2)}q_{ii})^T p_{ii} x_i > 0, \; i = 1,2,...,s; \\ -k_{ii} & \textit{при} \qquad \sigma_{ii}(S_{ii}^{(2)}q_{ii})^T p_{ii} x_i < 0, \; i = 1,2,...,s, \end{cases}$$

$c_{ij}^k \in R^{nk} - k - \textit{я} \quad \textit{компонента} \quad \textit{вектора} \qquad c_{ij}.$

Доказательство. Оценки а) осуществляется путем преобразований левой части выражения. а). А именно:

$$\eta_i^2 (D^+_{x_i} v_{ii})^T f_i\ (x^i) = \eta_i^2 \{\dot{x}_i^T p_{ii} x_i\ + x_i^T p_{ii} \dot{x}_i\ \} =$$

$$= \eta_i^2 \{[A_{ii} x_i\ + S_{ii}^{(2)} q_{ii} f_{ii}\ (\tilde{\sigma}_{ii})]^T p_{ii} x_i\ + x_i^T p_{ii} [A_{ii} x_i\ + S_{ii}^{(2)} q_{ii} f_{ii}\ (\tilde{\sigma})]\} \le$$

$$\le x_i^T \{\eta_i^2 [p_{ii} A_{ii}\ + A_{ii}^T p_{ii}\ + p_{ii} S_{ii}^{(2)} q_{ii} k_{ii}^* (c_{ii}^i)^T\ + (S_{ii}^{(2)} q_{ii} k_{ii}^* (c_{ii}^i)^T)^T p_{ii}\ ]\} x_i\ \le$$

$$\le \rho_i^{(1)}(s) \left\| x_i \right\|^2, \qquad \forall x_i\ \in N_{ix_0},\ i \in [1,s].$$

Оценка б) доказывается аналогично доказательству оценки а).

Лемма 3. Пусть выполняются все условия леммы 2. Тогда для выражения (9) выполняется неравенство

$$D^+V(x) \le u^T C u \qquad \forall (x,s) \in N_{x_0} \times \Phi_S, \tag{10}$$

где

$C = [c_{ij}],\ i,j \in [1,s],\ c_{ii} = \rho_i^{(1)}(S^*) + \rho_i^{(2)}(S^*),\quad c_{ij} = c_{ji} = \rho_{ij}(S^*) \quad (i \ne j) \in [1,s],$

$S^* \in \Phi_s$ постоянная матрица такая, что

$$\rho_i^{(k)}(S) \le \rho_i^{(k)}(S^*),\ \ \rho_{ij}(S) \le \rho_{ij}(S^*),\ \ k = 1,2.$$

Доказательство. При выполнении всех условий леммы 2 имеем

$$D^+V(x)^\Delta = \eta^T [D^+ v_{ij}(x_i\, x_j)]\eta = \sum_{i=1}^{s} \eta_i^2 (D^+ v_{ii}(x_i))^T (f_i\ (x^i)) + f_i^*(x,s)) +$$

$$2\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^{s} \eta_i\, \eta_j\, (D^+ v_{ij}(x_i\, x_j))^T (f_i\ (x^i) + f_i^*(x,s)) \le \sum_{i=1}^{s} (\rho_i^{(2)}(S)) \left\| x_i \right\|^2 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^{s} \rho_{ij}(S) \left\| x_i \right\| \left\| x_j \right\| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{s} (\rho_i^{(1)}(S^*) + \rho_i^{(2)}(S^*)) \left\| x_i \right\|^2 + 2\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^{s} \rho_{ij}(S^*) \left\| x_i \right\| \left\| x_j \right\| = \sum_{i=1}^{s} c_{ii} \left\| x_i \right\|^2 + 2\sum_{i=1}^{s}\sum_{\substack{j=2 \\ j>i}}^{s} c_{ij} \left\| x_i \right\| \left\| x_j \right\| =$$

$$= u^T C u\ , \qquad \forall (x,s) \in N_{x_0} \times \Phi_s .$$

Это и требовалось доказать.

2.Теорема об абсолютной устойчивости.

На основе оценок для матрицы-функции, полученных в предыдущем пункте, устанавливается следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть уравнения движения крупномасштабной системы Лурье (1) таковы, что для них построена матрица-функция (4) с элементами (5), удовлетворяющими оценкам (6) и для производной Дини (9) выполняется оценка (10). Если

а) матрица А - положительно-определенная;

б) матрица С - отрицательно –определенная на Φ_s .

Тогда состояние равновесия x=0 системы (1)равномерно асимптотически устойчиво на Φ_s .

Если к тому же $\mathrm{N_{ix}} = \mathrm{R}^{n_i}$,то состояние равновесия x=0 системы (1) равномерно асимптотически устойчиво в целом на Φ_s .

Доказательство. Если выполняются оценки (6), то выполняются по условиям леммы 1. При выполнении условия леммы 1 и условия а) теоремы 1 функция (7) является определенно-положительной и убывающей на $\mathrm{N_{ix}}$. Из оценки (10) и условия б) теоремы 1 следует, что выражение (9) отрицательно на $N_{x_0} \times \Phi_s$.

Эти условия, как известно [1], достаточны для структурно равномерной асимптотической устойчивости состояния равновесия x=0 системы (1) на φ_s

В случае $N_{ix} = R^{n_i}$ функция (7) будет определенно-положительной, убывающей и радиально неограниченной, в силу чего вместе с другими условиями теоремы доказывается второе утверждение.

Замечание 1. Теорема 1 остаётся в силе, если матрица A – условно положительно-определенная и матрица C – условно отрицательно-определённая.

Пример 1. Пусть система (1) является системой 4-го порядка типа системы Лурье, декомпозированной на две взаимосвязанные подсистемы второго порядка, определяемые следующими векторами и матрицами:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 0 & 0{,}1 \end{bmatrix}, \quad q_{1l} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_{2l} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

$$c_{1l}^T = (0{,}1;\ 0;\ 0{,}1;\ 0), \quad c_{2l}^T = (0{,}1;\ 0;\ 0;\ 0{,}1), \quad k_{il} = 1,\ i,l = 1,2;$$

$$S_{il}^{(1)} = I, \quad S_{ij}^{(2)} = s_{ij} I, \quad i,j = 1,2; \quad I = diag(1,1).$$

Здесь $s_{ij} : [-\infty, +\infty] \to [0,1]$ – структурный параметр.

Структурное множество определяется так:

$$\Phi_s = \{S : 0 \le S_{ij}^{(k)} \le I, \quad S_{ij}^{(1)} = I, \ \ i, j, k = 1,2\}.$$

Для элементов матрицы-функции (4), выбранных в виде

$$v_{ii}(x_i) = x_i^T I x_i, \qquad i = 1,2;$$

$$v_{12}(x_1, x_2) = v_{21}(x_1, x_2) = x_1^T\, 0{,}1 I x_2,$$

выполняются оценки

$$v_{ii}(x_i) \ge \|x_i\|^2, \quad i = 1,2;$$

$$v_{12}(x_1, x_2) \ge -0{,}1 \|x_1\| \|x_2\|.$$

Пусть $\eta^T = (1,1)$, тогда матрица $\tilde{A}$, соответствующая матрице A в оценке (8)

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 1 \end{bmatrix}$$

положительно- определенная.

При таком выборе элементов $v_{ij}(\cdot);\ i,j = 1,2,$ имеем :

1) *при* $k_i^* = 0$

$$\rho_1^{(1)}(s) = -6;\ \rho_2^{(1)}(s) = 0{,}2; \quad \rho_{12}^{(1)}(s) = 1{,}1 + 0{,}02 S_{11};\ \rho_{21}^{(2)}(s) = -0{,}9 + 0{,}02 S_{22};\ \rho_{12}(s) = 0{,}29;$$

2) *при* $k_i^* = k = 1$

$$\rho_1^{(1)}(s) = -6 + 0{,}02 S_{11};\ \rho_2^{(1)}(s) = 0{,}2 + 0{,}01 S_{22}; \quad \rho_1^{(2)}(s) = 1{,}1 + 0{,}02 S_{11} + 0{,}001 S_{21};$$

$$\rho_2^{(2)}(s) = -0{,}9 + 0{,}001 S_{12} + 0{,}02 S_{22}; \quad \rho_{12}(s) = 0{,}29 + 0{,}011 S_{11} + 0{,}01 S_{12} + 0{,}005 S_{21} + 0{,}007 S_{22}.$$

Матрица $\tilde{C}$, соответствующая матрице C в оценке (10), имеет вид

$$\widetilde{C} = \begin{cases} \begin{bmatrix} -4{,}88 & 0{,}29 \\ 0{,}29 & -0{,}68 \end{bmatrix} & \text{при } k_i^* = 0; \\ \begin{bmatrix} -4{,}859 & 0{,}323 \\ 0{,}323 & -0{,}669 \end{bmatrix} & \text{при } k_i^* = k_i = 1, \end{cases}$$

и является отрицательно-определенной.

Итак, все условия теоремы 1 выполняются и состояние x=0 системы (1) с матрицами (11) структурно асимптотически устойчиво в целом на Φ_s .

Литература:

1. Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наук. Думка, 1884

2. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. Достаточные условия абсолютной устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях
// Автоматика. – 1991. - № 5. – С. 31-38.

3. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. К теории устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях // Автоматика. -1991. – № 6. – С. 10-14.

4. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема А. // Электронное моделирование. – 1992. – 14, №1. – С. 3-10.

5. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема Б. // Электронное моделирование. – 1992. – 14, № 4. – С. 35-42.

Андижон давлат университети,
2013 йил 22 мартда қабул қилинган