ҚАВАРИҚ ФУНКЦИЯНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛИНИ ҚУРИШ ХУСУСИДА

А.Тоҳиров, Х.Қўшақов

Ушбу мақолада қаварик функциянинг таърифи асосида унинг математик модели қурилган ҳамда узлуксиз функциялар синфида бу моделнинг содда кўринишга келиши исботланган.

***Калит сўзлар**: математик модель, қаварик функция, узлуксиз функциялар синфи.*

В статье на основе определения выпуклой функции построена её математическая модель, доказано простое представление этой модели для класса непрерывных функций.

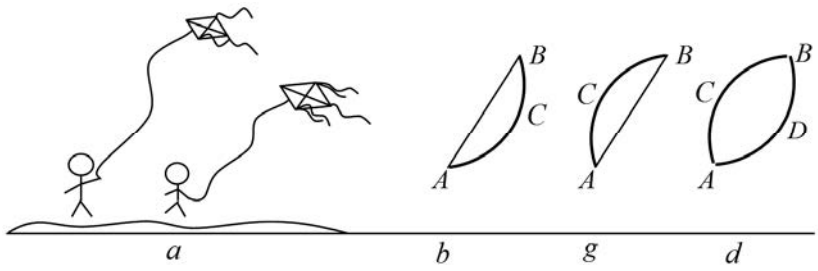
***Ключевые слова**: математическая модель, выпуклая функция, класс непрерывных функций.*

On the base of definition of convex function the authors try to construct mathematical model. The simple view of this model is proved for continuous class of functions.

***Key words**: mathematical model, convex function, continuous class of functions.*

Бизга аниқланиш соҳаси бирор $X \subset R$ оралиқдан (кесма, интервал, ярим интервал) иборат чегараланган, сонли $y = f(x)$ функция берилган бўлсин. Бу ҳолда, маълумки, текислик нуқталаридан тузилган $G = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ тўпламни $f(x)$ функциянинг X оралиқдаги графиги дейилади. Одатда, текислик нуқталаридан тузилган тўпламларда тартиб киритилмайди, яъни катта-кичик тушунчаси аниқланмайди. Аммо, шунга қарамасдан, G графикдан «юқорида ётувчи» ҳамда «пастда ётувчи» нуқта тушунчаси киритилиши мумкин [1]. Айни шу нарса бизга қаварик (ботик) функциянинг математик моделини тасаввур қилиш ҳамда қуриш имконини беради.

Масалан, 1-a) чизмадаги биринчи варрак иккинчисидан юқорида учяпти деб айтганимизда, одатда, баланддагисидан ергача масофа пастдагисидан ергача масофадан узунлигини тушунамиз. Қуйидаги 1-b), g), d) чизмаларга эътибор берайлик:



1-чизма.

Уларда:

1-b) чизмада AB кесма ва ACB эгри чизиқ;

1-g) чизмада ACB эгри чизиқ ва AB кесма;

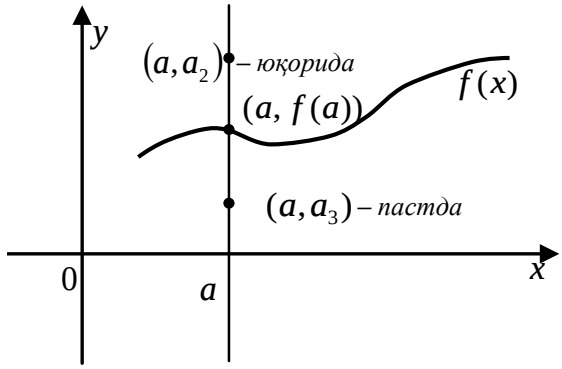
1-d) чизмада ACB эгри чизиқ ва ADB эгри чизиқ тасвирланган.

Уларни ҳам қуйидаги таърифларга кўра бирини иккинчисидан юқорида (мос равишда пастда) деб айтишга келишамиз.

1-таъриф [1]. Агар $f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасидан олинган ихтиёрий $a \in X$ учун $x = a$ тўғри чизиқнинг (a, a') нуқтаси ва G графикнинг $(a, f(a))$ нуқтаси ординаталари $a' \geq f(a)$

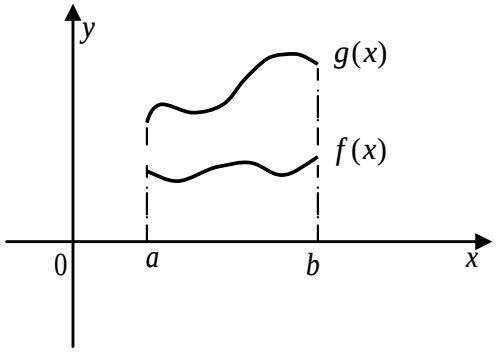
***А.Тоҳиров** – АДУ математика кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди;*
***Х.Қўшақов** – шу кафедра катта ўқитувчиси.*

(мос равишда $a' > f(a)$, $a' \le f(a)$, $a' < f(a)$ тенгсизликни қаноатлантирса, (a, a') нуқта G графикдан «юқорида» (мос равишда қатъий юқорида, пастда, қатъий пастда (2-чизма) ётади дейилади.



2-чизма.

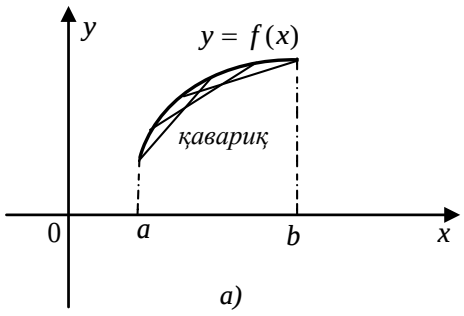
2-таъриф. X оралиқда аниқланган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар берилган бўлсин. Агар $g(x)$ функция графигининг ҳар бир нуқтаси $f(x)$ функция графигидан юқорида (пастда) ётса (3-чизма), у ҳолда $g(x)$ функция графиги $f(x)$ функция графигидан юқорида (пастда) ётади дейилади.



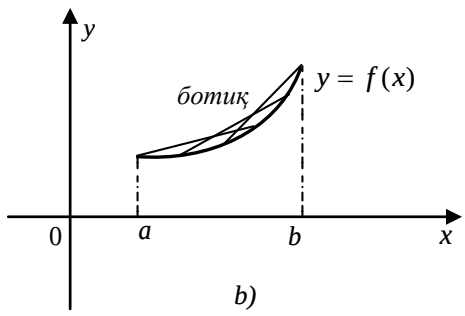
3-чизма.

Амалдаги деярли барча дарсликларда эътибордан четда қолдирилган бу таърифлар киритилгандан сўнг, X оралиқда қаварик (ботиқ) функциянинг таърифини беришга ва унинг математик моделини қуришга тўла тайёр бўлдик деб айта оламиз.

3-таъриф. Агар эгри чизиқнинг ҳар қандай ёйи шу ёйни тортиб турувчи кесмадан юқорида (пастда) ётса (4-чизма), бундай эгри чизиқ қаварик (ботиқ) эгри чизиқ дейилади:



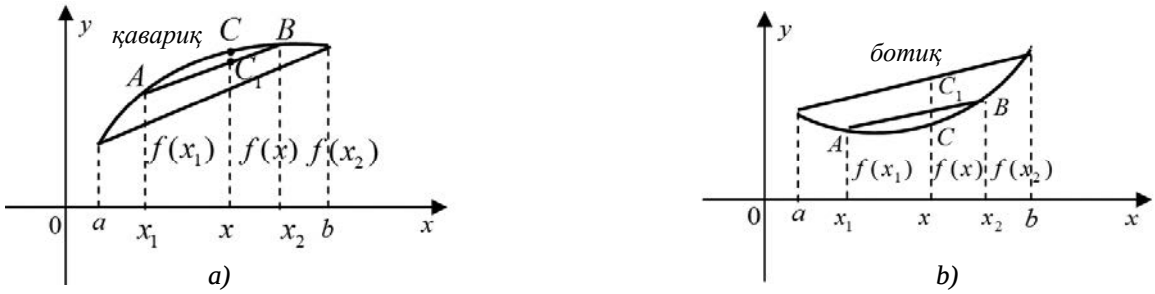
a)



b)

4-чизма.

Таъриф асосида қаварик (ботиқ) функциянинг математик моделини қуриш учун қуйидаги чизмаларга (5-чизма) мурожаат қилайлик:



5-чизма.

У ҳолда таърифга биноан, барча $x_1, x_2 \in X$ ва $x \in [x_1, x_2]$ лар учун $DC \geq DC_1$ ($DC \leq DC_1$) (*) тенгсизлик ўринли бўлиши керак. Айни шу тенгсизлик қаварик (ботиқ) функциянинг математик моделидир. Энди биз уни X ораликдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 ҳамда улар орасидан олинган ихтиёрий x орқали ёзишга киришамиз.

Дастлаб $0x$ ўқидаги иккита x_1 ва x_2 нуқталар ҳосил қилган $[x_1, x_2]$ кесманинг параметрик тенгламасини, яъни унинг ихтиёрий нуқтаси кўринишини аниқлаб оламиз. Шу мақсадда ихтиёрий $x \in [x_1, x_2]$ нуқтани олсак,

$$x_2 - x_1 = (x_2 - x) + (x - x_1)$$

тенгликка кўра ҳосил қилинган

$1 = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ тенгликда $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \lambda$

деб олсак, натижада $[x_1, x_2]$ кесманинг $\lambda \in [0,1]$ параметр орқали

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \qquad (1)$$

тенгламасини ҳосил қиламиз. (1) нинг $x = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2$ кўринишидан фойдаланиб $(x_1, f(x_1))$ ва $(x_2, f(x_2))$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини кўрамиз:

$$y(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

У ҳолда (*) тенгсизликнинг чап ва ўнг томонини ҳисобласак,

$$DC = f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2),\ DC_1 = y((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) = (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

бўлиб, натижада функциянинг қавариқлиги (ботиқлиги) модели

$$\begin{matrix} f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ (f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)) \end{matrix} \quad (*)$$

кўринишни олади.

Демак, X оралиқда аниқланган $f(x)$ функция шу оралиқда қавариқ (ботиқ) бўлиши учун барча $\lambda \in [0,1]$ ларда $(*)$ тенгсизлик ихтиёрий $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ нуқталар учун бажарилиши керак. Бироқ, $f(x)$ функция X оралиқда узлуксиз бўлганида, унинг шу оралиқда қавариқ (ботиқ) бўлиши учун $(*)$ тенгсизлик амалда λ нинг биргина $\lambda = \frac{1}{2}$ қийматида бажарилиши зарур ва етарли экан. Таъриф ёрдамида функциянинг қавариқлигини текширишга доир мисоллар кўрайлик.

1-мисол. Ушбу $f(x) = -|x| + 2$ функциянинг R да қавариқлиги исботлансин.

Бу ҳолда

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = -|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2| + 2$$
$$(1-\lambda) f(x_1) = -(1-\lambda)|x_1| + 2(1-\lambda)$$
$$\lambda f(x_2) = -\lambda |x_2| + 2\lambda$$

бўлиб, натижада

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - ((1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)) = (-|(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2| + 2) -$$
$$-(-(1-\lambda)|x_1| + 2(1-\lambda) + (-\lambda|x_2| + 2\lambda)) \geq -((1-\lambda)|x_1| - \lambda|x_2| + 2) +$$
$$+(1-\lambda)|x_1| - 2(1-\lambda) + \lambda|x_2| - 2\lambda = 0,$$

яъни $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) - ((1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)) \geq 0$.

Бу тенгсизликдан эса $f(x) = -|x| + 2$ функциянинг R да қавариқлиги келиб чиқади.

2-мисол. Ушбу $f(x) = x^2$ функциянинг R да ботиқлиги исботлансин.

Бунинг учун биз ботиқликни билдирувчи

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

тенгсизликни текширамиз. Ҳисобласак

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = ((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)^2,$$
$$(1-\lambda) f(x_1) = (1-\lambda){x_1}^2,$$
$$\lambda f(x_2) = \lambda {x_2}^2,$$

бўлиб, $\lambda \in [0,1]$ шартга кўра

$$(1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2) - f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) =$$
$$= (1-\lambda){x_1}^2 + \lambda {x_2}^2 - ((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)^2 = (1-\lambda){x_1}^2 + \lambda {x_2}^2 - (1-\lambda)^2 {x_1}^2 -$$
$$-2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 - \lambda^2 {x_2}^2 = ((1-\lambda) - (1-\lambda)^2){x_1}^2 + (\lambda - \lambda^2){x_2}^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 =$$
$$= \lambda(1-\lambda){x_1}^2 + \lambda(1-\lambda){x_2}^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_1 x_2 = \lambda(1-\lambda)({x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1 x_2) =$$
$$= \lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Демак, $f(x) = x^2$ функция R да ботиқ.

Теорема. X оралиқда узлуксиз бўлган $f(x)$ функциянинг шу X оралиқда қаварик (ботиқ) бўлиши учун X оралиқдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталарда

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$
$$\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)\quad(**)$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Зарурийлиги $f(x)$ функциянинг қавариклиги (ботиқлиги) шартида $\lambda=\frac{1}{2}$ деб олишдан ҳосил бўлади.

Етарлилигини тескарисини фараз қилиш билан исботлаймиз, яъни X оралиқдан олинган ихтиёрий x_1 ва x_2 нуқталар учун

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

тенгсизлик бажарилсин-у, бироқ $f(x)$ функция X оралиқда қаварик бўлмасин деб фараз қилайлик. У ҳолда $f(x)$ функция графиги устида шундай иккита $A=(x_1,\ f(x_1))$ ва $B=(x_2,\ f(x_2))$ нуқталар топиладики, бу нуқталарни туташтирувчи AB тўғри чизиқ кесмасига тиралган AB эгри чизиқ ёйининг ақалли битта нуқтаси AB кесмадан пастда ётади. Шундай нуқталардан бирини C билан белгилайлик. У ҳолда қуйидаги икки ҳолнинг бири рўй беради:

1-ҳол. AB эгри чизиқ ёйи AB кесма билан ички (эгри чизиқнинг A ва B нуқталари орасида ётувчи) нуқталарда кесишмайди;

2-ҳол. AB эгри чизиқ ёйи AB кесма билан ақалли битта ички нуқтада кесишади.

1-ҳолда AB эгри чизиқ ёйи AB кесмадан пастда ётади, чунки C нуқта AB кесмадан пастда ётади. Бу ҳолда A ва B нуқталарнинг абсциссалари орқали ҳосил қилинган $\frac{x_1+x_2}{2}$ нуқтани олсак, AB ёй нуқталари AB кесмадан пастда ётгани учун

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

бўлиб, бу тенгсизлик $(*)$ шартга зиддир. Демак, 1-ҳол теорема шартига зид.

2-ҳолга ўтайлик. Агар AB эгри чизиқ ёйи AB кесмани ички битта $D=(x_3,\ f(x_3))$ нуқтада кесиб ўтади деб қарасак, у ҳолда C нуқта AB кесмадан пастда ётгани туфайли ёки $C\in AD$ ёй, ёки $C\in DB$ ёй бўлади, яъни ёки AD ёй AD кесмадан пастда ётади ёки DB ёй DB кесмадан пастда ётади. Буларнинг иккаласи ҳам теорема шартига зидлигини 1-ҳолда кўрдик. Агар AB эгри чизиқ ёйи билан AB кесма иккита ички нуқталарда кесишса, у ҳолда AB эгри чизиқ ёйининг C нуқтани ўзида сақлайдиган қисми мос кесмадан пастда ётади. Бу эса яна 1-ҳолга мувофиқ теорема шартига зиддир. Шунингдек, AB эгри чизиқ ёйи AB кесма билан учта ички нуқталарда кесишганида ҳам, бу нуқталар ҳосил қилган AB эгри чизиқ қисмларининг C нуқтани ўзида сақлайдиган ёйи шу ёйни тортиб турувчи мос кесмадан пастда ётади. Бундай хулоса эса яна 1-ҳолга кўра теорема шартига зид ва ҳ.к. Демак, 2-ҳол бизни доимо теорема шартига зид қилиб қўяр экан.

Шунга ўхшаш функция ботиқлиги шартини ҳам текшириш мумкин.

Юқорида аниқланганларни жамласак, натижада биз (*) шарт функция қавариқлигининг зарурий ва етарли шарти эканлигини тўла исботладик.

Исботланган теореманинг айрим татбиқларини кўриб ўтайлик.

1-мисол. Ушбу $f(x)=\sin x$ функциянинг $[0,\pi]$ оралиқда қавариқлиги исботлансин.

Исботи. Бунинг учун юқорида исботланган теоремага кўра $[0,\pi]$ дан олинган ҳар қандай x_1 ва x_2 нуқталарда

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}\geq\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}$$

тенгсизликнинг ўринлилигини исботлашимиз керак.

Тенгсизликнинг чап ва ўнг томонлари айирмасини ўрганайлик:

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}=\sin\frac{x_1+x_2}{2}\left(1-\cos\frac{x_1-x_2}{2}\right)$$

ва $\frac{x_1+x_2}{2}\in[0,\pi]$ эканлигидан $\sin\frac{x_1+x_2}{2}\geq 0$ ҳамда доимо $1-\cos\frac{x_1-x_2}{2}\geq 0$ бўлгани учун

$$\sin\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2}\geq 0 \text{ ёки } \sin\frac{x_1+x_2}{2}\geq\frac{\sin x_1+\sin x_2}{2},$$

яъни $f(x)=\sin x$ функциянинг $[0,\pi]$ да қавариқлигини тасдиқловчи тенгсизликка эга бўламиз.

2-мисол. Барча $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ларда $\sin x\geq\frac{2}{\pi}x$ тенгсизликнинг ўринлилиги исботлансин.

1-мисолга кўра $\sin x$ функция $[0,\pi]$ кесмада қавариқ. У ҳолда бу функция $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ кесмада ҳам қавариқ. Бундан эса $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ кесмада $\sin x$ функциянинг графиги $(0,0)$ ва $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ нуқталардан ўтувчи $y=\frac{2}{\pi}x$ тўғри чизиқ кесмасидан юқорида ётиши келиб чиқади, яъни

$$\sin x\geq\frac{2}{\pi}x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

3-мисол. Ушбу $f(x)=\ln x$ функциянинг $(0,+\infty)$ оралиқда қавариқлиги исботлансин.

Исботи. Юқоридаги теоремага кўра

$$\ln\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}=\ln\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{\sqrt{x_1x_2}}\geq\ln 1=0$$

тенгсизлик $\ln x$ функцияни $(0,+\infty)$ да қавариқлигини тасдиқлайди.

Адабиётлар:

1. Бурбаки Н. Функции действительного переменного.- М.: Наука, 1965.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. - М.: Наука, 1970.
3.Азларов Т., Мансуров Н. Математик анализ асослари. 1-қисм. - Т., 2005.

2013 йил 14 майда қабул қилинган

(Тақризчи: проф. В.Муллажонов)