ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАНИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲАЙДАШ УСУЛИДА ЕЧИШ

М.Олимов, Ш.М.Исмоилов, Э.З.Абдуллаев

Мақолада турли хил чегаравий шартларда берилган тўртинчи тартибли ўзгарувчи коэффицентли оддий дифференциал тенгламани дифференциал ҳайдаш усули ёрдамида Коши масаласига келтирилган. Бир неча мисолларда аниқ ечим билан таққослаб текшириб кўрилган.

Калит сўзлар: *дифференциал ҳайдаш усули, Коши масаласи, Рунге-Кутта усули, Канторович-Власов усули, Delphi дастурлаш тили.*

В работе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения четвертого порядка с различными граничными условиями. Также описывается метод дифференциальной прогонки, с помощью которого пути уравнения приходят к виду задачи Коши, что проверено с помошью нескольких примеров.

Ключевые слова: *дифференциальная прогонка, метод Коши, метод Рунге-Кутта, метод Канторовича-Власова, программный язык Delphi.*

This article discusses the usual differential equation of the forth order with different border conditions. It also describes the method of dispersal helper with the help of which the Koshi problem is brought up. Some examples have also been provided and checked.

Key words: *Differential method of moving, method of Koshi, method of Runge-Kutta, method of Kantorovich-Vlasov, Delphi program language.*

Турли хил чегаравий шартларда берилган тўртинчи тартибли оддий дифференциал тенгламани дифференциал ҳайдаш усули ёрдамида Коши масаласига келтириб, Рунге-Кутта усули билан ечимини оламиз.

Қуйидаги дифференциал тенгламани қараймиз:

$$\left[p(x)u''(x)\right]'' + r(x)u''(x) + q(x)u'(x) + \theta(x)u(x) = f(x), \quad (1)$$

Бу ерда, $p(x), r(x), q(x), \theta(x), f(x)$ ҳар хил чегаравий шартларда аниқланган функциялар.

1. (1) тенглама учун чегаравий шарт қуйидагича

$$u(a) = u''(a) = u(b) = u''(b) = 0, \quad (2)$$

Қуйидаги белгилашни киратамиз:

$$u = u_1,\ pu'' = u_2 \quad (3)$$

М.Олимов *– Наманган муҳандислик-педагогика институти Касб таълими (Информатика ва информацион технологиялар) кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди;*
Ш.М.Исмоилов *– шу кафедра ассистенти;*
Э.З.Абдуллаев *– АДУ математика кафедраси ассистенти.*

(1) тенгламани қуйидагича ёзамиз:

$$W''(x) = A(x)W'(x) + B(x)W(x) + F(x)\,, \qquad (4)$$

бу ерда

$$W(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix},\ A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{p(x)} \\ -\theta(x) & -\dfrac{r(x)}{p(x)} \end{pmatrix},\ F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix};$$

$$W(a)=0,\ W(b)=0 \qquad (5)$$

4) тенгламанинг ечимини қуйидагича излаймиз [1-2] :

$$W(x) = \alpha(x)W'(x) + \beta(x) \qquad (6)$$

бошланғич шарт

$$W(a)=0 \qquad (7)$$

бу ерда $\alpha(x)$ – 2x2 ўлчовли матрица, $\beta(x)$ - 2 ўлчовли вектор. $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ ҳайдаш коэффициентларини топиш учун (6) формуладан биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни олиб, (4) формулага қўйилади. Натижада қуйидаги $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ га нисбатан биринчи тартибли оддий дифференциал системасига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'(x) &= E - \alpha(x)A(x) - \alpha(x)B(x)\alpha(x) \\ \beta'(x) &= -\alpha(x)B(x)\beta(x) - \alpha(x)F(x) \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

бошланғич шарт

$$\alpha(b) = \beta(b) = 0 \qquad (9)$$

Шундай йўл билан (1)-(2) тенглама (6)-(7), (8)-(9) кўринишидаги Коши масаласига келтирилди.

(1) тенгламада

$$p(x)=1,\ r(x)=q(x)=\theta(x)=0,\ f(x)=1$$

бўлсин.

Бундан қуйидагига эга бўламиз:

$$u^{IV}(x)=1$$

чегаравий шарт

$$u(0)=u''(0)=u(1)=u''(1)=0$$

Тенгламанинг аниқ ечими қуйидагича:

$$u(x)=\frac{1}{24}(x^4-2x^3+x)$$

Масала ҳозирда ва кейинги мисолларда [0:1] оралиқда кўрилади. Қуйида (1-жадвалда) келтирилган натижалар Delphi дастурлаш тилида яратилган дастур орқали олинган [3].

Қуйидаги 1-жадвалда $u(x),\ u'(x),\ u''(x)$ ва $u'''(x)$ ларнинг x=0,25 x=0,50 ва x=0,75 нуқталарда аниқ ва тақрибий ечимлари берилган.

1-жадвал

x	Қийматлар	$u(x)$	$u'(x)$	$u''(x)$	$u'''(x)$
0,25	Аниқ	0,00927734	0,02864583	-0,09375000	-0,25000000
	Тақрибий	0,00927736	0,02864581	-0,09375002	-0,24999997
0,50	Аниқ	0,01302083	0,00000000	-0,12500000	0,00000000
	Тақрибий	0,01302086	0,00000006	-0,12500004	0,00000008
0,75	Аниқ	0,00927734	-0,02864583	-0,09375000	0,25000000
	Тақрибий	0,00927737	-0,02864596	-0,09375006	0,25000025

Юқоридаги жадвалда иккала томони иккинчи чегаравий шарт асосида ечилган чегаравий масаланинг натижалари кўрсатилган. Жадвалдан шуни кўриш мумкинки, тақрибий ечим билан аниқ ечим орасидаги фарқ натижанинг каср қисми 7 та белгигача усма-уст тушиши жадвалда акс этди.

2. (1) тенгламани

$$u(a)=u'(a)=0$$
$$u(b)=u''(b)=0 \qquad (10)$$

чегаравий шартларда ечамиз.

(1) тенгламанинг ечимини (6) кўринишида излаймиз

$$W(x)=\alpha(x)W'(x)+\beta(x)$$

Бу ерда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ $\alpha'(b)$=$\beta(b)$=0 бошланғич шартлар билан (8) тенгламалар системасидан (9) бошланғич шарт билан аниқланади.

(10) чегаравий шартни қаноатлантириш учун, (6) матрицали тенгламани қуйидаги бошланғич шартларда ечиш лозим:

$$W(a)=\begin{pmatrix}u_1(a)\\u_2(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\\beta_2(a)-\dfrac{\alpha_{22}(a)\beta_1(a)}{\alpha_{12}(a)}\end{pmatrix} \qquad (11)$$

Бу ерда $\alpha_{12}(x),\alpha_{22}(x),\beta_1(x),\beta_2(x)$ - $\alpha(x)$ матрица ва $\beta(x)$ вектор элементлари $\alpha_{12}(a),\alpha_{22}(a),$ $\beta_1(a),\beta_2(a)$ - (8) тенгламанинг $x=a$ нуқтадаги ечими қийматлари.

Шундай қилиб, (1), (10) чегаравий масала (8) - (9) ва (6) Коши масаласига келтирилди.

$$\left[(1+x)u''(x)\right]''+u(x)=x^2(1-x)^3+12(3+8x-20x^2)$$

тенгламани

$$u(0)=u'(0)=0\quad u(1)=u''(1)=0$$

чегаравий шартларда оламиз

Берилган масаланинг аниқ ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$u(x)=x^2(1-x)^3$$

2-жадвалда $u(x),\ u'(x),\ u''(x)$ ва $u'''(x)$ ларнинг x=0, x=0,25, x=0,50 ва x=0,75 нуқталардаги аниқ ва тақрибий қийматлари келтирилган.

2-жадвал

x x	Қийматлар	$u(x)$	$u'(x)$	$u''(x)$	$u'''(x)$
0,00	Аниқ	0,00000000	0,00000000	2,00000000	-18,0000000
	Тақрибий	0,00000000	0,00000000	2,00000678	-18,0000923
0,25	Аниқ	0,02636719	0,10546875	0,56250000	-3,75000000
	Тақрибий	0,02636795	0,10546773	0,56250004	-3,74999975
0,50	Аниқ	0,03125000	-0,06250000	-0,50000000	3,00000000
	Тақрибий	0,03125103	-0,06250123	-0,50000159	3,00000437
0,75	Аниқ	0,00878906	-0,08203125	-0,31250000	2,25000000
	Тақрибий	0,00878967	-0,08203352	-0,31240770	2,25001052

Жадвалда бир томони биринчи чегаравий шартда, иккинчи томони иккинчи чегаравий шартда ечилган чегаравий масаланинг натижаларни кўрсатилган. Жадвалдан шуни кўриш мумкинки, тақрибий ечим билан аниқ ечим орасидаги фарқ бу ерда ҳам натижанинг каср қисми 7 та белгигача усма-уст тушиши жадвалда акс этди.

3. Энди (1) тенглама учун чегаравий шарт қуйидагича бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} &u(a)=0, \quad u'(a)=0 \\ &u''(b)+p_1u(b)=0, \quad u'''(b)+p_2u'(b)=0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

У ҳолда дифференциал ҳайдаш усулига асосан қуйидагига эга бўламиз:

$$p(x)u''(x)=\alpha(x)u'(x)+\beta(x)u(x)+\gamma(x) \tag{13}$$

бу ерда $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$ - ҳозирча номаълум функция.

(12) нинг учинчи шарти ва (13) ифодадан қуйидагига эга бўламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(b)=\gamma(b)=0 \\ &\beta(b)=-\rho_1p(b) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

(13) ифодани дифференциаллаб, қуйидагини оламиз:

$$u''=\left(\frac{\alpha}{p}\right)'u'+\frac{\alpha}{p}u''+\left(\frac{\beta}{p}\right)'u+\frac{\beta}{p}u'+\left(\frac{\gamma}{p}\right)' \tag{15}$$

(12) нинг охирги чегаравий шартни қаноатлантириши учун (15) муносабатдан қуйидаги системани оламиз:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha'(b)=(\rho_1-\rho_2)p(b) \\ &\beta'(b)=-\rho_1p'(b), \quad \gamma'(b)=0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$ ни аниқлаш учун (13) ва (15) ни (1) га қўйиш орқали, иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} \alpha''&=-\frac{\alpha}{p}\left(\alpha'+2\beta+r+\frac{\alpha^2}{p}\right)-q-2\beta'-\left(\frac{\alpha^2}{p}\right)' \\ \beta''&=-\frac{\beta}{p}\left(\alpha'+\beta+r+\frac{\alpha^2}{p}\right)-\theta-\left(\frac{\alpha\beta}{p}\right)' \\ \gamma''&=-\frac{\gamma}{p}\left(\alpha'+\beta+r+\frac{\alpha^2}{p}\right)+f-\left(\frac{\alpha\gamma}{p}\right)' \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар системаси (17) ва шунга ўхшаш барча тенгламалар системаларини янги қидирилаётган ўзгарувчиларни танлаш йўли билан биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар системаси кўринишига келтириш мумкин.

$$\left[(1+x)u''(x)\right]'' + u''(x) - 12\,u(x) = 2\left\{25 + 6x\left[7 - x^2(2+x)\right]\right\}$$

тенгламани

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0;$$

$$u''(1) - 6.5u(1) = 0 \;\; u'''(1) - 3u'(1) = 0$$

чегаравий шартларда ечамиз.

Масаланинг аниқ ечими қуйидаги кўринишда

$$u(x) = \left[x(1+x)\right]^2$$

Қўйилган масалани ечиш учун даставвал иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама (17) ни (14) ва (16) чегаравий шартларда, кейин эса (13) ни

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$$

бошланғич шартларда ечамиз.

3-жадвалда $u(x)$, $u'(x)$, $u''(x)$ ва $u'''(x)$ ларнинг x=0, x=0,25, x=0,50 ва x=0,75 нуқталардаги аниқ ва тақрибий қийматлари келтирилган.

3-жадвал

x	Қийматлар	$u(x)$	$u'(x)$	$u''(x)$	$u'''(x)$
0,00	Аниқ	0,00000000	0,00000000	2,00000000	12,00000000
	Тақрибий	0,00000000	0,00000000	2,00000007	12,00000034
0,25	Аниқ	0,09769625	0,93750000	5,75000000	18,00000000
	Тақрибий	0,09769646	0,93750097	5,75999648	18,00002591
0,50	Аниқ	0,56250000	3,00000000	11,00000000	24,00000000
	Тақрибий	0,56249995	2,99999607	10,99999816	23,99995068
0,75	Аниқ	0,72265625	6,56250000	17,75000000	30,00000000
	Тақрибий	0,72265437	6,56248926	17,74998002	29,99993300

Юқоридаги 3-жадвалда бир томони биринчи чегаравий шартда, иккинчи томони учинчи чегаравий шартда ечилган чегаравий масаланинг натижаларни кўрсатилган. Жадвалдан шуни кўриш мумкинки, бу ерда ҳам тақрибий ечим билан аниқ ечим орасидаги фарқнинг каср қисми 7 та белгигача усма-уст тушади.

Умуман, тўртинчи тартибли ўзгарувчи коэффициентли оддий дифференциал тенгламани дифференциал ҳайдаш усули ёрдамида Коши масаласига келтириб, турли хил чегаравий шартларда ечиб, айни ечимлар билан таққослаганда ҳам аниқлик даражаси юқори эканлиги кўрсатилди. Бундан шундай хулоса қилиш мумкинки, ихтиёрий амалий масалани, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга оид бўлса ҳам, Канторович-Власов усули билан оддий дифференциал тенгламага келтириб, ечимини дифференциал ҳайдаш усули ёрдамида аниқлаш мумкин. Маълумки, амалий масалалар, мисол учун, эластиклик назариясининг турли хил масалаларининг ечимини ҳам юқорида тавсия қилинган усул ёрдамида топиш мумкин.

Адабиётлар:

1. Olimov M., Irisqulov S.,Ismonova K., Imamov A. Sonli usullar va algoritmlar. O'quv qo'llama.- Namangan, 2013
2. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.- М.:Наука, 1989
3. Фаронов В.В Delphi 5. Учебный курс.- М.: Нолидж, 2000.

2014 йил 22 сентябрда қабул қилинган
(Тақризчи: проф .Ғ.Мўминов)