ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. Г. МИЛАДЖОНОВ, К.Х.ТУРГУНОВА, Ш.ЭРМАТОВ, Ж. МУЛЛАЖОНОВА

Ушбу ишда қатъий мусбат функциялар ёрдамида баъзи механик системалар турғунлигининг етарли шартлари ҳосил қилинади.

This work deals with the problems of establishing sufficient conditions of stability of some mechanic systems with the help of positive functions

---

Предлагаемый подход для исследования устойчивости нелинейных механических систем основан на специальном представлении скалярных либо векторных функций через строго положительные функции. Введем некоторые определения.

Определение 1. Скалярная функция $\varphi(x): R^n \to R$ называется

1) строго положительной, если существует инвариантная во времени окрестность $\mathcal{N}^\circ$ точки $x=0$, $\mathcal{N}^\circ \subseteq R^n$ такая, что

а) $\varphi(x)$ - непрерывна на $\mathcal{N}^\circ$; $\varphi(x) \in \mathrm{C(N)}$;

б) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\varphi(x)$ не меньше ε на $\mathcal{N}^\circ$, т.е. $\varphi(x) \geq \varepsilon > 0$, при всех $x \in \mathcal{N}^\circ$;

в) $\varphi(0) \geq \min \varphi(x) = \varepsilon > 0$;

2) строго положительной в целом, если условия а) - в) определения 1) выполняются при $\mathcal{N}^\circ = R^n$:

3) строго отрицательной (в целом), если $(-\varphi(x))$ – строго положительная (в целом).

Определение 2. Скалярная функция $\varphi(t,x): R \times R^n \to R$ называется

1) строго положительной на $\mathcal{T}_\tau = [\tau, +\infty[$, $\tau \in R_+$, если существует связная инвариантная во времени окрестность $\mathcal{N}^\circ$ точки $x=0$, $\mathcal{N}^\circ \subseteq R^n$ такая, что

а) $\varphi(t,x)-$ непрерывная по $(t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times \mathcal{N}^\circ$, $\varphi(t,x) \in \mathcal{C}(\mathcal{T}_\tau \times \mathcal{N}^\circ)$;

б) существует функция $\varepsilon(t) > 0$ такая, что $\varphi(t,x)$ не меньше $\varepsilon(t)$ на $\mathcal{N}^\circ$,

$\varphi(t,x) \geq \varepsilon(t) > 0$, при всех $(t,x) \in \mathcal{T}_\tau \times \mathcal{N}^\circ$;

в) $\varphi(t,0) \geq \min \varphi(t,0) = \varepsilon(t)$, $\forall t \in \mathcal{T}_\tau$;

2) строго положительной в целом на $\mathcal{T}_\tau$, если условия (а–в) определения 2 выполняются при $\mathcal{N}^\circ = R^n$;

3) строго отрицательной (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ (на $\mathcal{T}_\tau \times \mathcal{N}^\circ$), если $(-\varphi(t,x))$ – строго положительная (в целом) на $\mathcal{T}_\tau$ (на $\mathcal{T}_\tau \times \mathcal{N}^\circ$).

В приведенных определениях выражение « на $\mathcal{T}_\tau \times \mathcal{N}^\circ$ » опускается, если все соответствующие условия выполняются при всех $t \in R_+$.

Из этих определений следует справедливость следующих утверждений:

1. Действительное число $\alpha > 0$ строго положительное и $\beta < 0$ строго отрицательное.

2. Если функции $\varphi_i(\cdot)$, $i = \overline{1,n}$ строго положительные, $v_j(\cdot)$, $j = \overline{1,m}$ положительно определенные (полуопределенные) и $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ действительные числа, то функции $\alpha_i \varphi_i(\cdot)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(\cdot)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(\cdot) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j(\cdot)$ являются строго положительными, а функции $\alpha_i \varphi_i(\cdot) v_j(\cdot)$, $\alpha_i \dfrac{v_j(\cdot)}{\varphi_i(\cdot)}$, $\alpha_i v_j(\cdot)$ являются положительно определенными (полуопределенными).

3. Произвольную функцию $f(x): R^n \to R,\ x \in R^n$ можно представить в виде разности двух строго положительных функций.

4. Если $x \in R^n$, скалярная функция $\varphi(x): R^n \to R$ строго положительная (отрицательная), то состояние равновесия $x = 0$ уравнения

$$\dot{x} = \varphi(x)x$$

неустойчиво (асимптотически устойчиво).

5.Пусть $x \in R^n$, скалярные функции $\varphi_i(x): R^n \to R,\ (i = \overline{1,k})$ строго положительные, $g_j(x): R^n \to R,\ (j = \overline{1,s})$ строго отрицательные, тогда состояние равновесия $x = 0$ систем

$$\dot{x} = (\sum_{j=1}^{s} g_j(x))x, \quad \left(\dot{x} = (\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x))x\right)$$
$$\dot{x} = \left(\varphi_i(x) g_j(x)\right)x,\ 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le s,$$
$$\left(\dot{x} = \left(\varphi_i(x)\varphi_j(x)\right)x, \quad \dot{x} = \left(g_i(x) g_j(x)\right)x,\ 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le s\right)$$

асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Определение 3. Числа $\varepsilon(\min \varepsilon(t))$ в определении 1 (определении 2) называются порядком строгости строго положительной функции $\varphi(x)$ $(\varphi(t,x))$.

Вывод. Если в определении 1 (определении 2) $\min \varphi(x) = \varphi(0)$, $\varepsilon = 0$ $(\min \varphi(t,x) = \varphi(t,0),\ \varepsilon(t) = 0,)$, тогда эти определения совпадают с определениями положительной (отрицательной) полуопределенности функций $\varphi(x)$ $(\varphi(t,x))$, приведенных в монографии [1].

6. Пусть $\varphi_1(x)$ строго положительная функция порядка $\varepsilon_1 > 0,\ \varphi_2(x)$ строго отрицательная функция порядка - ε_2, $\varepsilon_2 > 0$ и $\min \varphi_1(x) = \varphi_1(0)$, $\min \varphi_2(x) = \varphi_2(0)$, тогда состояние равновесия $x = 0$ системы

$$\dot{x} = \left(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\right)x \quad (1)$$

асимптотически устойчиво при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, и неустойчиво при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

Лемма 1. Произвольную функцию $f(x): R^n \to R$ можно представить в виде линейной комбинации линейно независимых строго положительных функций.

Доказательство. Представим функцию $f(x)$ в следующем виде

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_p f_p(x) \quad (2)$$

где α_i, $(i = \overline{0,p})$ действительные числа, $f_i(x),\ (i = \overline{1,p})$ некоторые линейно независимые функции. Рассмотрим функции

$$f_0(x) \equiv 1,\ f_1(x), f_2(x), ..., f_p(x).$$

Если среди этих функций существуют строго положительные, то их оставим без изменений. Если $f_i(x),\ (1 \le i \le p)$ строго отрицательные, то их заменим функциями $-f_i(x)$, т.е. $\alpha_i f_i(x) = -\alpha_i(-f_i(x))$. Остальные функции, на основе утверждении 3, представим в виде разности двух строго положительных функций. Учитывая все сказанное в разложении (2), получим линейную комбинацию некоторых линейно независимых строго положительных функции, т.е.

$$f(x) = \alpha_0' + \alpha_1'\varphi_1(x) + \alpha_2'\varphi_2(x) + ... + \alpha_k'\varphi_k(x) \quad (3)$$

где $\alpha_i' \in R,\ \varphi_0(x) \equiv 1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ - линейно независимые строго положительные функции.

Отметим, что разложение (3) является не единственным, это разложение можно получить другим путем, например, применяя утверждение 3 для всех функций $f_i(x),\ i = \overline{1,p}$ в выражении (2).

Следствие 1. Для последовательности функций

$$g_1(x), g_2(x), ..., g_s(x) \quad (4)$$

существуют линейно независимые строго положительные функции

$$\varphi_0(x) = c, \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x) \quad (5)$$

такие, что

$$g_i(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_{ij}\varphi_j(x),\quad i=1,2,..,s,\quad (6)$$

где $\alpha_{ij}\in R,\ i=\overline{1,s},\ j=\overline{1,k}.$

Следствие 2. Пусть функция $f(x):R^n\to R$ представлена в виде (3) и функции $\varphi_i(x)$ имеют порядок строгости ε_i, $(i=\overline{1,k})$ соответственно. Тогда состояние равновесия $x=0$ системы

$$\dot{x}=f(x)x \quad (7)$$

асимптотически устойчиво, если $\alpha_0'+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i'\varepsilon_i<0,$ и неустойчиво, если $\alpha_0'+\sum_{i=1}^{k}\alpha_i'\varepsilon_i>0.$

Задача 1. Определить оценки областей значений параметров, для которых нулевое состояние равновесия системы изодромного регулирования асимптотически устойчиво.

Система изодромного регулирования в канонических переменных имеет вид [1,2]

$$\begin{aligned}\dot{x}_i&=-\rho_i x_i+\sigma,\quad i=1,2,...,n,\\ \dot{\sigma}&=\sum_{i=1}^{n}a_i x_i-p\sigma-f(\sigma),\end{aligned}\quad (8)$$

где $\rho_i>0,\ p>0,\ \sigma f(\sigma)>0,$ при $\sigma\neq 0,\quad f(0)=0.$ Укажем оценки области значений параметров, для которых состояние $x=0,\sigma=0$ системы (8) асимптотически устойчиво. Заметим, что при $\sigma\neq 0$ условие $\sigma f(\sigma)>0$ можно заменить условием $\frac{f(\sigma)}{\sigma}>0$. Отсюда следует, что скалярная функция $\varphi(\sigma)=\frac{f(\sigma)}{\sigma}+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ - достаточно малое число, является строго положительным с порядком строгости $\varepsilon>0$, т.е. $\min\varphi(\sigma)=\varepsilon>0$.

Систему (8) представим в следующем матричном виде

$$\dot{y}=B_0y+\varphi(\sigma)B_1y, \quad (9)$$

где $y^T=(x_1,x_2,...,x_n,\sigma)\in R^{n+1},\quad \varphi(\sigma)=\frac{f(\sigma)}{\sigma}+\varepsilon,\quad \varepsilon\to 0.$

$$B_0=\begin{pmatrix}A & e\\ a^T & -p+\varepsilon\end{pmatrix},\quad B_1=\begin{pmatrix}A_0 & e_0\\ e_0^T & -1\end{pmatrix},$$

$$A=diag(-\rho_1,-\rho_2,...,-\rho_n),\quad e=(1,1,...,1)\in R^n,\ a^T=(a_1,a_2,...,a_n),$$

$$A_0=(0)\in R^{n\times n},\ e_0^T=(0,0,...,0)\in R^n$$

Для системы (9) построим функцию Ляпунова в виде

$$v(y)=y^TPy, \quad (10)$$

где $P=diag(1,1,...,1,\alpha),\quad \alpha=|a_0|^{-1},\quad |a_0|=\max(|a_1|,|a_2|,...,|a_n|)$

Для производной от функции (10) в силу системы (9) имеем

$$\begin{aligned}(\dot{v}(y))&=y^T\left(B_0^TP+PB_0\right)y+\varphi(\sigma)y^T\left(B_1^TP+PB_1\right)y\le\\ &\le\left(\lambda_M\left(B_0^TP+PB_0\right)+\varphi(\sigma)\lambda_M\left(B_1^TP+PB_1\right)\right)\|y\|^2.\end{aligned}$$

Заметим, что $\lambda_M\left(B_1^TP+PB_1\right)=0$. Для определения знака $\lambda_M\left(B_0^TP+PB_0\right)$ вычислим главные маноры матрицы $B_0^TP+PB_0$:

$$\Delta_1=-2\rho_1<0,\ \Delta_2=4\rho_1\rho_2>0,....,\Delta_n=(-1)^n2^n\prod_{i=1}^{n}\rho_i,$$

$$\Delta_{n+1}=\left|B_0^TP+PB_0\right|=(-1)^n2^{n+1}\rho_1^2\rho_2^2....\rho_{n-1}^2\rho_n\left(-p+\varepsilon+\sum_{i=1}^{n}\frac{(1+\alpha a_i)^2}{4\rho_i\alpha}\right)$$

Отсюда следует, что при четном n $\Delta_{n+1} < 0$, а при нечетном n $\Delta_{n+1} > 0$, т.е.

$$-p + \varepsilon + \sum_{i=1}^{n} \frac{(1+\alpha a_i)^2}{4\rho_i \alpha} < 0$$

то $\lambda_M (B_0^T P + P B_0) < 0$ или $(\dot{v}(y)) < 0$, т.е. функция $(\dot{v}(y))$ отрицательно определенная и состояние равновесия $y = 0$ системы (9) асимптотически устойчиво при условии

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(1+\alpha a_i)^2}{4\rho_i \alpha} < p - \varepsilon \qquad (11)$$

Если учесть, что $\varepsilon \to 0$, то условие (11) можно заменить условием

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(1+\alpha a_i)^2}{4\rho_i \alpha} < p \text{ или } \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{a_i}{|a_0|}\right)^2}{4\rho_i} \le p \qquad (12)$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{a_i}{|a_0|}\right)^2}{4\rho_i} \le |a_0| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i},$$

то ограничениями на параметры, при которых состояние $y = 0$ (или $x = 0, \sigma = 0$) асимптотически устойчиво, будут

$$|a_0| \le p \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_i} \right)^{-1}, \qquad (13)$$

где $|a_0| = \max(|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|)$.

Задача 2. Установить оценки области значений параметров, для которых нулевое состояние равновесия системы, описывающей продольное движение самолета, асимптотически устойчиво.

В канонических переменных уравнения продольного движения самолета имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\rho_i x_i + \sigma, \\ \dot{\sigma} &= \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i + r p_2 \sigma - f(\sigma), \quad i = 1,2,3,4, \end{aligned} \qquad (14)$$

где вещественные постоянные $\rho_i > 0, i = 1,2,3,4,\ r > 0,\ p_2 < 0,\ \sigma f(\sigma) > 0$ или $\frac{f(\sigma)}{\sigma} > 0$,

$$\rho = \min(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$$

Введем строго положительную функцию

$$\varphi(\sigma) = \frac{f(\sigma)}{\sigma} + \varepsilon,$$

где ε - достаточно малое положительное число, т.е. $\varepsilon \to 0$. Тогда систему (14) представим в следующим виде

$$\dot{y} = B_0 y + \varphi(\sigma) B_1 y, \quad (15)$$

где $y^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, \sigma),\ \varphi(\sigma) = \frac{f(\sigma)}{\sigma} + \varepsilon,\ \varepsilon \to 0,$

$$B_0 = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\rho_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\rho_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_4 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & r p_2 + \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Установим оценку области значений параметров, для которых состояние равновесия системы (15) асимптотически устойчиво в целом. Для этого построим функцию Ляпунова вида (10) с матрицей

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&\alpha\end{pmatrix},$$

где $\alpha=|\beta|^{-1}$, $|\beta|=\max(|\beta_1|,|\beta_2|,|\beta_3|,|\beta_4|)$.

Как и в задаче 1 $\lambda_M(B_0)=0$; вычислим главные миноры матрицы $B_0^TP+PB_0$:

$$\Delta_1=-2\rho_1<0,\quad \Delta_2=4\rho_1\rho_2>0,\quad \Delta_3=-8\rho_1\rho_2\rho_3<0,\quad \Delta_4=16\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4>0,$$

$$\Delta_5=\left|B_0^TP+PB_0\right|=64\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2\rho_4\left(rp_2+\varepsilon+\sum_{i=1}^{4}\frac{(1+\alpha\beta_i)^2}{4\rho_i\alpha}\right)$$

Отсюда следует, что если $\Delta_5<0$, то $\lambda_M(B_0^TP+PB_0)<0$ или $(\dot v(y))<0$, т.е. функция $(\dot v(y))$ отрицательно определенная и состояние равновесия системы (15) асимптотически устойчиво при условии

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{(1+\alpha\beta_i)^2}{4\rho_i\alpha}<|p_2|r-\varepsilon \qquad (16)$$

Если учесть, что $\varepsilon\to 0$, то условие (16) можно заменить следующим

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{(1+\alpha\beta_i)^2}{4\rho_i\alpha}<|p_2|r \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{4}\frac{\left(1+\frac{\beta_i}{|\beta|}\right)^2|\beta|}{4\rho_i}\le|p_2|r. \qquad (17)$$

Так как $0\le 1+\frac{\beta_i}{|\beta|}\le 2$ или $0\le\left(1+\frac{\beta_i}{|\beta|}\right)^2\le 4$, и

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{\left(1+\frac{\beta_i}{|\beta|}\right)^2|\beta|}{4\rho_i}\le|\beta|\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\rho_i}. \qquad (18)$$

Учитывая неравенство (18), получим достаточное условие асимптотической устойчивости состояния равновесия системы (14) в следующем виде

$$|\beta|\le|p_2|r\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{\rho_i}\right)^{-1}, \qquad (19)$$

где $|\beta|=\max(|\beta_1|,|\beta_2|,|\beta_3|,|\beta_4|)$.

Литература:

1. Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс – Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. − Киев.: Наукова думка, 1984. − 307 с.
2. Летов А.М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. −М.: Физматгиз, 1962. − 484 с.

Андижон давлат университети,
2012 йил 14 мартда қабул қилинган