НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

С.Х.Акбарова, М.Х.Акбарова

Мақолада соҳанинг ичида иккита бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш эллиптик-параболик тенглама учун нолокал чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Калит сўзлар: *аралаш типдаги тенглама, бузилиш чизиғи, ички бузилиш чизиғи, чегаравий масала, нолокал чегаравий масала, регуляр ечим.*

В статье доказано существование и единственность решения нелокальной краевой задачи для смешанного эллиптико-параболического уравнения с двумя внутренними линиями вырождения.

Ключевые слова: *уравнение смешанного типа, линия вырождения, внутренняя линия вырождения, краевая задача, нелокальная краевая задача, регулярное решение.*

In this article uniqueness and existence of solution of the nonlocal boundary value problems for mixed elliptic-parabolic equation with two inner degeneration lines are proved.

Key words: *equation of mixed type, degeneration lines, inner degeneration lines, boundary value problem, nonlocal boundary value problem, regular solution.*

Данная статья посвящена постановке и исследованию одной нелокальной краевой задачи для эллиптико-параболического уравнения вида

$$0=\begin{cases} y^{m_1}u_{xx}-|x|^{n_1}u_y, x>0, \\ (-y)^{m_2}u_{xx}+|x|^{n_2}u_{yy}, x<0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $m_k, n_k = const (k=1,2)$, причем $n_1=n_2$, $m_1>0$, $m_2>0$, $m_2>n_2>\max\left(m_1, \frac{n_2+2}{m_2+2}\right)-1$.

Пусть область Ω, ограниченная отрезками A_0A_1, A_1B_1, B_1B_0 прямых $x=h_1$, $y=Y$, $x=-h_1$ соответственно при $y>0$ и гладкими кривыми

$$\sigma_i: \frac{1}{q_2^2}|x|^{2q_2}+\frac{1}{p_2^2}(-y)^{2p_2}=\frac{h_1^{2q_2}}{q_2^2}\ (i=1,2),$$

при $y<0$, $h_1=(2q_1)^{1/q_1}$, $2q_i=n_i+2(i=1,2)$, $2p_2=m_2+2$, $Y=const>0$, и при $i=1$ $x>0$, при $i=2$ $x<0$.

Здесь нужно отметить, что локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумя линиями и различными порядками вырождения исследованы в работах [1-6].

Обозначим через Ω_1^+ и Ω_2^+ параболические части, Ω_1^- и Ω_2^- эллиптические части смешанной области Ω;

$$I_1^+=\{(x,y): 0<x<h_1, y=0\},\ I_1^-=\{(x,y): -h_1<x<0, y=0\},$$

$$I_2^+=\{(x,y): x=0, 0<y<Y\},\ I_2^-=\{(x,y): x=0, -h_2<y<0\},\ h_2=\left(p_2/q_2\, h_1^{2q_2}\right)^{1/p_2},$$

$$\Delta_1=\Omega_1^-\cup\Omega_1^+\cup I_1^+, \Delta_2=\Omega_2^-\cup\Omega_2^+\cup I_1^-, \Delta^+=\Omega_1^+\cup\Omega_2^+\cup I_2^+, \Delta^-=\Omega_1^-\cup\Omega_2^-\cup I_2^-,$$

$2\alpha_2 = n_2/(n_2+2),\ 2\beta_2 = m_2/(m_2+2).$

Задача ТС. Требуется найти функцию $u(x,y),$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y) \in !\ \left(\overline{\Omega} \setminus I_2^+\right) \cap C^1\left(\Omega_i^+ \cup \Omega_i^- \cup \sigma_i\right);\ u_y(x,-0) \in C(I_1^- \cup I_1^+),$

$u_x \in C(I_1^- \cup I_1^+ \cup I_2^-),$ причем $u_y(x,-0)$ и u_x могут обращаться в бесконечность порядка меньше $(1-2\beta_2)/(1-2\alpha_2)$ и единицы в точках $A_0(h_1,0), B_0(-h_1,0), O(0,0), C(0,-h_2)$ соответственно;

2) удовлетворяет разрывным условиям склеивания вида

$$u(+0,y) = u(-0,y) + \alpha(y), y \in \overline{I_2^+}, \tag{2}$$

$$u_x(+0,y) = \beta(y)u_x(-0,y) + \gamma(y), y \in I_2^+; \tag{3}$$

3) $u(x,y)$ - является регулярным в области Ω / I_2^+ решением уравнения (1);

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{x=h_1} = \varphi_1(y), 0 \le y \le Y, \tag{4$_1$}$$

$$u(x,y)\big|_{x=-h_1} = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le Y, \tag{4$_2$}$$

$$\left(\rho_1(s)A_s^+[u] + \delta_1(s)u\right)\Big|_{\sigma_1} = \psi_1(s),\ 0 < s < l, \tag{5$_1$}$$

$$\left(\rho_2(s)A_s^-[u] + \delta_2(s)u\right)\Big|_{\sigma_2} = \psi_2(s), 0 < s < l, \tag{5$_2$}$$

4) выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^{-m_1}u_y(x,y) = \lim_{y\to-0} u_y(x,y) \text{ на } I_1^+ \cup I_1^-, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to+0} u_x(x,y) = \lim_{x\to-0} u_x(x,y) \text{ на } I_2^-, \tag{7}$$

где S - длина дуги кривой $\sigma_1(\sigma_2)$, отсчитываемая от точки $A_0(h_1,0)\left(B_0(-h_1,0)\right)$, l - длина кривой σ_i, а $A_s^{\pm}[] = (-y)^{m_2}\dfrac{dy}{ds}\dfrac{\partial}{\partial x} - (\pm x)^{n_2}\dfrac{dx}{ds}\dfrac{\partial}{\partial y}$ (при $i=1$ берется верхний знак, а при $i=2$ - нижний знак), $\alpha(y),\ \beta(y),\ \gamma(y),\ \varphi_i(y),\ \psi_i(s),\ \rho_i(s),\ \delta_i(s),\ (i=1,2)$ - заданные функции, причем

$$\alpha(y) \in C(\overline{I_2^+}) \cap C^1(I_2^+),\ \beta(y),\ \gamma(y) \in C(\overline{I_2^+}),\ \beta(y) > 0 \tag{8}$$

$$\varphi_i(y) \in C[0,Y] \cap C^1(0,Y) \tag{9$_i$}$$

$$\rho_i^2(s) + \delta_i^2(s) \ne 0,\ \rho_i(s),\ \delta_i(s),\ \psi_i(s) \in C[0,l]. \tag{10$_i$}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если выполняются условия (8), (9$_i$), (10$_i$) и

$$\rho_i(s)\cdot\delta_i(s) \ge 0,\ 0 \le s \le l (i=1,2), \tag{11$_i$}$$

то решение задачи ТС существует и единственно.

Докажем единственность решения поставленной задачи. Пусть $u(x,y)$ является решением однородной задачи ТС. Из области $\Omega_1^- \cup \Omega_2^-$ получим тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(-y)^{m_2} u u_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[|x|^{n_2} u u_y\right] - \left[(-y)^{m_2} u_x^2 + |x|^{n_2} u_y^2\right] = 0,$$

и интегрируя это равенство по области

$$\Omega_{1\varepsilon}^- = \overline{\sigma_{1\varepsilon}} \cup \overline{I_{1\varepsilon}^+} \cup \overline{I_{2\varepsilon}^-}, \Omega_{2\varepsilon}^- = \overline{\sigma_{2\varepsilon}} \cup \overline{I_{1\varepsilon}^-} \cup \overline{I_{2\varepsilon}^-},$$

имеем

$$\iint\limits_{\Omega_{i\varepsilon}^-}\left[\left[(-y)^{m_2} u_x^2 + |x|^{n_2} u_y^2\right]\right] dxdy = \iint\limits_{\Omega_{i\varepsilon}^-}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left[(-y)^{m_2} u u_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[|x|^{n_2} u u_y\right]\right] dxdy, \quad (12_i),$$

где ε – достаточно малое число и

$$\sigma_{i\varepsilon} : \frac{1}{q_2^2}|x|^{2q_2} + \frac{1}{p_2^2}(-y)^{2p_2} = \frac{(h_1-\varepsilon)^{2q_2}}{q_2^2},\ I_{1\varepsilon}^+ = \left\{(x,y) : \varepsilon < x < h_1 - \varepsilon, y = -\varepsilon\right\},$$

$$I_{1\varepsilon}^- = \left\{(x,y) : \varepsilon - h_1 < x < -\varepsilon, y = -\varepsilon\right\},\ I_{2\varepsilon}^- = \left\{(x,y) : x = \varepsilon, \varepsilon - h_2 < y < -\varepsilon\right\},$$

$$h_{2\varepsilon} = \left(\frac{p_2}{q_2}(h_1-\varepsilon)^{q_2}\right)^{1/p_2}.$$

В силу формулы Грина из (12_1), (12_2) при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\iint\limits_{\Omega_1^-}\left[\left[(-y)^{m_2} u_x^2 + x^{n_2} u_y^2\right]\right] dxdy + \iint\limits_{\Omega_2^-}\left[\left[(-y)^{m_2} u_x^2 + (-x)^{n_2} u_y^2\right]\right] dxdy - \int\limits_{\sigma_1} u A_s^+[u] ds - \int\limits_{\sigma_2} u A_s^-[u] ds =$$

$$= \int\limits_0^{h_1} x^{n_2} \tau_1(x) \nu_1^-(x) dx + \int\limits_{-h_1}^0 (-x)^{n_2} \tau_2(x) \nu_2^-(x) dx,$$

где

$$\tau_i(x) = u(x,0),\ x \in \overline{I_1^{\pm}}, \quad (13_i) \qquad \nu_i^-(x) = u_y(x,-0),\ x \in I_1^{\pm}. \quad (14_i)$$

Отсюда, учитывая условия (5_1), (5_2), находим

$$\iint\limits_{\Omega_1^-}\left[\left[(-y)^{m_2} u_x^2 + x^{n_2} u_y^2\right]\right] dxdy + \iint\limits_{\Omega_2^-}\left[\left[(-y)^{m_2} u_x^2 + (-x)^{n_2} u_y^2\right]\right] dxdy + \int\limits_{\sigma_1} \frac{\delta_1(s)}{\rho_1(s)} u^2 ds + \int\limits_{\sigma_2} \frac{\delta_1(s)}{\rho_1(s)} u^2 ds =$$

$$= \int\limits_0^{h_1} x^{n_2} \tau_1(x) \nu_1^-(x) dx + \int\limits_{-h_1}^0 (-x)^{n_2} \tau_2(x) \nu_2^-(x) dx. \quad (15)$$

Так как $n_1 = n_2$, то из параболической части области мы получим следующее равенство

$$\nu_i^+(x) = |x|^{-n_2} \tau_i''(x),$$

$$\tau_i(0) = 0, \tau_i(\pm h_1) = 0,$$

здесь $\nu_i^+(x) = \lim\limits_{y \to +0} y^{-m_1} u_y(x,y)$. Подставляя эти равенства в (15) с учетом (6) имеем

$$\iint\limits_{\Omega_{1\varepsilon}^-}\left[\left[(-y)^{m_2} u_x^2 + x^{n_2} u_y^2\right]\right] dxdy + \iint\limits_{\Omega_{2\varepsilon}^-}\left[\left[(-y)^{m_2} u_x^2 + (-x)^{n_2} u_y^2\right]\right] dxdy + \int\limits_{\sigma_1} \frac{\delta_1(s)}{\rho_1(s)} u^2 ds + \int\limits_{\sigma_2} \frac{\delta_1(s)}{\rho_1(s)} u^2 ds =$$

$$= -\int\limits_0^{h_1} \tau_1'^2(x) dx - \int\limits_{-h_1}^0 \tau_2'^2(x) dx.$$

Отсюда, учитывая условия (11_i), получим, что $u(x,y)=0$ в области $\overline{\Omega}$.

Для доказательства существования решения задачи ТС рассмотрим следующие вспомогательные задачи:

Задача T_i $(i=1,2)$, Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y)\in !\left(\overline{\Delta_i}\right)\cap C^1(\Omega_i^+\cup\Omega_i^-\cup\sigma_i)$; $u_y(x,-0)\in C(I_1^{\pm})$, $u_x\in C(I_1^{\pm}\cup I_2^-)$, причем $u_y(x,-0)$ и u_x могут обращаться в бесконечность порядка меньше $(1-2\beta_2)/(1-2\alpha_2)$ и единицы в точках $A_0(h_1,0), B_0(-h_1,0), O(0,0), C(0,-h_2)$ соответственно;

2) $u(x,y)$ - является регулярным в областях Ω_i^+,Ω_i^- решением уравнения (1);

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (4_i), (5_i), (6) и

$$u(0,y)=\tau_3(y),\ y\in\overline{I_2^-},\qquad (16)\qquad u(\pm 0,y)=\tau_4^{\pm}(y),\ y\in\overline{I_2^+},\qquad (17)$$

где $\tau_3(y)\in C\left(\overline{I_2^-}\right)\cap C^1\left(I_2^-\right)$, $\tau_4^{\pm}(y)\in C\left(\overline{I_2^+}\right)\cap C^1\left(I_2^+\right)$ - заданные функции.

Задача T_3. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

1) $u(x,y)\in C\left(\overline{\Delta^-}\right)\cap C^1\left(\Delta^-\cup I_1^+\cup I_1^-\cup\sigma_1\cup\sigma_2\right)$, причем u_x и u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше $(1-2\beta_2)/(1-2\alpha_2)$ в точках $A_0(h_1,0), B_0(-h_1,0), O(0,0), C(0,-h_2)$ соответственно;

2) $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (1) в областях Ω_1^-, Ω_2^-;

3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (5_1), (5_2), (14_1), (14_1) и (7), где $\nu_1^-(x),\nu_2^-(x)$ – заданные функции, причем

$$\nu_i^-(x)\in C^1\left(I_1^{\pm}\right)\qquad (18_i)$$

и они могут иметь особенность порядка меньше $(1-2\beta_2)/(1-2\alpha_2)$ на концах интервала $I_1^{\pm}$.

Задача T_4. Определить функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

1) $u(x,y)\in C\left(\overline{\Delta^+}\setminus\overline{I_2^+}\right)\cap C^1\left(\Delta^+\setminus I_2^+\right)\cap C^{2,1}\left(\Omega_1^+\cup\Omega_2^+\right)$

2) $u(x,y)$ – удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1^+,Ω_2^+;

3) удовлетворяет условиям (2),(3) и краевым условиям (4_i), (13_i) (i = 1,2), где $\tau_i(x)$ – заданные функции, причем

$$\tau_1(x)\in C\left(\overline{I_1^+}\right)\cap C^2\left(I_1^+\right),\ \tau_2(x)\in C\left(\overline{I_1^-}\right)\cap C^2\left(I_1^-\right),\qquad (19)$$
$$\tau_1(0)=\tau_2(0).$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (9_i), (10_i), (11_i). Тогда задача $T_i\,(i=1,2)$ однозначно разрешима.

Применяя метод интегралов энергии, нетрудно показать, что задача T_i имеет единственное решение.

Исследуя задачу T_i, придем к выводу, что существование решения этой задачи эквивалентным образом сведется к сингулярному интегральному уравнению нормального типа[4]:

$$\rho_i(z)+\frac{ctg\pi\beta_2}{\pi}\int_0^1\frac{\rho_i(\eta)}{\eta-z}d\eta+\int_0^1\frac{K_0(z,\eta)-K_0(z,z)}{\eta-z}\rho_i(\eta)d\eta+\int_0^1K_1(z,\eta)\rho_i(\eta)d\eta+$$
$$+\int_0^1K_2(z,\eta)\rho_i(\eta)d\eta=f_i(z,\tau_3)\,(i=1,2),\ 0<z<1,\qquad (20_i)$$

где

$$\rho_i(z)=x^{\frac{1-2\beta_2}{2}}\left(1+x^2\right)v_i^-\left[\pm\left(q_2^2x\right)^{1/2q_2}\right],\ z=\frac{2x}{h\left(1+x^2\right)},\ \eta=\frac{2t}{h\left(1+t^2\right)},\ h=\frac{2h_1^{2q_2}/q_2^2}{1+\left(h_1^{2q_2}/q_2^2\right)^2},$$

$$\overline{\tau_3}(y)=\tau_3\left[-\left(p_2^2y\right)^{1/2p_2}\right],\ \tau_4(y)=u(+0,y),$$

$K_0(z,\eta)=\frac{1}{1+t^2}\left\{\lambda_1\left(1-xt-t^{\alpha_2+\beta_2}+xt^{\alpha_2+\beta_2-1}\right)-\lambda_2\left(1-xt-t^{\beta_2-\alpha_2+1}+xt^{\beta_2-\alpha_2}\right)\right\}$, λ_1, λ_2 - заданные постоянные, ядра $K_1(z,\eta)$ может иметь слабую особенность, $K_2(z,\eta)$ - непрерывно при $z\neq\eta$, может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $z\to\eta$. В силу условий, наложенных на заданные функции задачи, убедимся, что функция $f_i(z,\tau_3)\in C^1(0,1)$ и ограничена при $z\to0$, имеет слабую особенность при $z\to1$ [4]. Решение $\rho_i(z)\in C^1(0,1)$ ищем в классе функций $h(0)$, где индекс равен нулю [5]. С помощью метода Карлемана-Векуа [7-9], регуляризируя уравнение (20_i), сведем к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Это уравнение, в силу единственности решения поставленной задачи, будет однозначно разрешимо.

Теорема 3. Если выполнены условия (10_i), (11_i), (18_i) то решение задачи T_3 существует и единственно.

Как и в задаче T_i, с помощью метода интегралов энергии доказывается, что задача T_3 имеет единственное решение.

Решая задачу с условиями (5_1), (5_2), (14_1), (14_2) и $v_3(y)=\lim\limits_{x\to0}u_x(x,y)$, $y\in\overline{I_2^-}$, находим

$$\overline{\tau_3}(y)=\int_0^1K_3(t,y)\left(\overline{v_1^-}(t)+\overline{v_2^-}(t)\right)dt+f_3(y),\qquad(21)$$

где $\overline{\tau_3}(y)=\tau_3\left(-\left(p_2^2y\right)^{1/2p_2}\right)$.

Нетрудно убедиться, что на основе условий (10_i), (18_i), ($i=1,2$), имеем

$$\tau_3(y)\in C[0,h_2]\cap C^1(0,h_2).$$

Теорема 4. Если выполняются условия (8), (9_i),(11_i), то существует единственное решение задачи T_4.

Из области Ω_1^+ и Ω_2^+ получим соотношение

$$v_4^+(y)=y^{-m_1}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^yz(y-t)\tau_4^+(t)t^{m_1}dt+F_1(y,\tau_1,\varphi_1),\qquad(22)$$

$$v_4^-(y)=y^{-m_1}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^yz(y-t)\tau_4^-(t)t^{m_1}dt+F_2(y,\tau_2,\varphi_2),\qquad(23)$$

где $\tau_4^+(y)=u(+0,y)$, $\tau_4^-(y)=u(-0,y)$, $v_4^+(y)=u_x(+0y)$, $v_4^-(y)=u_x(0y)$.

В силу условия (2), (3) имеем

$$\tau_4^+(y)=\tau_4^-(y)+\alpha(y),\ y\in\overline{I_2^+},\qquad(24)\qquad v_4^+(y)=\beta(y)v_4^-(y)+\gamma(y),\ y\in\overline{I_2^+};\qquad(25)$$

Подставляя (24), (25) в (22), получим соотношение

$$\beta(y)v_4^-(y)=y^{-m_1}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^yz(y-t)\tau_4^-(t)t^{m_1}dt+$$

$$+y^{-m_1}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^yz(y-t)\alpha(t)t^{m_1}dt-\gamma(y)+F_1(y,\tau_1,\varphi_1).\qquad(26)$$

Теперь, исключая $v_4^-(y)$ из соотношений (23), (26), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\tau_4^-(y) = \int_0^y K_4(y,t)\tau_4^-(t)dt + f_4(y,\tau_1,\tau_2), \qquad (27)$$

где $f_4(y,\tau_1,\tau_2)$ - известная функция.

Принимая во внимание условия (8), (9_i), (19) убедимся, что $f_4(y,\tau_1,\tau_2) \in C[0,Y] \cap C^1(0,Y)$, а ядро $K_4(y,t)$ - непрерывно в $[0,Y]X[0,Y]$ при $y \neq t$, при $y = t$ может иметь особенность порядка меньше $(n_1+1)/(n_1+2)$.

Согласно теории интегральных уравнений Вольтерра [8-9], заключаем, что интегральное уравнение (24) однозначно разрешимо.

Пусть $u(x,y)$-решение задачи ТС . Из (21) и (27) находим $\tau_3(y)$ и $\tau_4^-(y)$, тогда в силу теоремы 2-4 задача ТС эквивалентна системе сингулярных интегральных уравнений (20_1), (20_2). После определения $v_i^-(x)$ $(i=1,2)$, решение задачи ТС в областях Δ_i найдется как решение задач T_i.

Теорема 1 доказана.

Литература:

1. Салахитдинов М.С., Хасанов А. // Дифференциальные уравнения.- 1983.- № 1.- С.110.
2. Салахитдинов М.С., Исломов Б. // Доклады АН СССР.- 1991,Т.316, № 5.- С.1051.
3. Исломов Б. // Узб. матем. журнал. 1993, № 2, С. 36.
4. Исломов Б., Акбарова С.Х. // Узб. матем. журнал. 2001, № 5-6.- С. 33.
5. Исломов Б. //Известия АН УзССР. 1985, № 6, С. 12.
6. Салахитдинов М.С., Исломов Б.И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. - Т.: MUMTOZ SO»Z, 2009.- 264 с.
7.Мусхелишвили Н.И. // Сингулярные интегральные уравнения.- М.: Наука, 1968.- 512 с.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1971.
9. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar.- T.: Yangiyul poligraph service, 2007.- 256 b.

Андижон давлат университети,
Тошкент ахборот технологиялари университети
2018 йил 21 февралда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.-м.ф.н. Т.Ибайдуллаев)