ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДОВ

Ф.А.Алиев, Ж.И.Хужаев, З.Н.Равшанов

Мақолада бир ўлчовли параболик тенгламани дифференциал-айирмалар (тўғри чизиқлар) усулида ечишнинг асосий босқичлари намойиш этилган. Уч диагоналли матрицанинг янги тўр функцияга нисбатан автоном оддий дифференциал тенгламаларга ўтиш имконини берадиган хос сонлари ва векторларини топиш усули келтирилган. Дастлабки тўр функциядан янгисига ва қайта ўтиш учун формулалар ҳамда усул ёрдамида олинган натижалардан мисол келтирилган.

Калит сўзлар: *бир ўлчамли параболик тенглама, тўғри чизиқлар методи, матрица.*

В статье представлены основные этапы решения одномерного параболического уравнения дифференциально-разностным методом, известным также как метод прямых. Показаны пути поиска собственных значений и векторов трехдиагональной матрицы, с помощью которых осуществляется переход к автономным обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно новых сеточных функций. Приведены формулы прямого перехода от исходной сеточной функции к новой и обратного перехода, а также типичный пример результатов расчета по данному методу.

Ключевые слова: *одномерное параболическое уравнение, метод прямых, матрица.*

The article discusses the main stages of the solution of a one-dimensional parabolic equation by a differential-difference method, also known as method of lines. It also studies the ways of finding eigenvalues and vectors of the tri-diagonal matrix with the help of which the transition to autonomous ordinary differential equations with respect to the new grid functions. The formulas for the direct transition from the initial grid function to the new and backward transition as well as a typical example of the calculation results for this method are given.

Key words: *one-dimensional parabolic equation, direct method, matrix.*

Дифференциально-разностный метод формировался в 50-е годы прошлого столетия. Тем не менее, основные результаты, полученные применением данного метода, относятся к задачам с граничными условиями первого и третьего родов. Причиной этому является отсутствие информации о фундаментальной и диагональной матрицах, которые необходимы для перехода из трехдиагональной матрицы, образующихся при аппроксимации составляющих оператора Лапласа, к отдельным уравнениям.

Ниже описываются особенности дифференциально-разностного метода при реализации его для решения уравнения теплопроводности с граничными условиями первого и второго родов.

Постановка задачи. Рассмотрим массу, которая имеет постоянную толщину l. Размеры массы в плане достаточно большие, они позволяют считать, что основные изменения температуры происходят по толщине. Установив ось координат по толщине массы, процесс теплопередачи описываем уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f\left(x,t\right). \quad (1)$$

Здесь $f\left(x,t\right)$ – мощность внутренних источников и стоков тепла в сечении x, приведенная по коэффициенту температуропроводности материала. Переменная t представляет произведение реального времени на коэффициент температуропроводности и имеет размерность *м*^{2}.

На границе $x = 0$ задано условие первого рода:

$$T\left(0,t\right) = \mu_0\left(t\right), \quad (2)$$

а на границе $x = l$ задан поток тепла с интенсивностью $q_l(t)/\lambda$ (λ – коэффициент теплопроводности массы)

$$\frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = q_l(t). \quad (3)$$

Задано начальное распределение температуры в массе:

$$T(x,0) = T_0(x). \quad (4)$$

Требуется изучить тепловое состояние массы на основе дифференциально-разностного метода [1-2].

Описание дифференциально-разностного метода. Вводится равномерная сетка по координате *x*:

$$\omega_x = \left(x_i = ih, \quad i = 0,1,...,N,N+1; \quad h = \frac{l}{N+1} \right).$$

Вводятся сеточные функции искомой $u_i(t)$, правой части $f_i(t)$ уравнения и граничных функций $\mu_0(t)$ и $q_{N+1}(t)$ для фиксированного значения t.

Сущность метода заключается в том, что с привлечением уравнения и его граничных условий составляются обыкновенные дифференциальные уравнения относительно сеточных функций $u_1(t),\ u_2(t),...,\ u_{N+1}(t)$.

Во внутренних узлах сетки расчетной области уравнение (1) аппроксимируется в виде

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f_i. \quad (5)$$

При $i = 1$ реализуется граничное условие (2) задачи при *x*=0 как

$$u_0(t) = \mu_0(t).$$

Реализация граничного условия (3) произведена интегро-интерполяционным методом согласно [5]:

$$\frac{du_{N+1}}{dt} = \frac{2}{h^2}u_N - \frac{2}{h^2}u_{N+1} + f_{N+1} + \frac{2}{h}q_{N+1}. \quad (6)$$

Дифференциально-разностные уравнения (5) и (6) с учетом условия (1) составляют матричное уравнение вида [1-2]

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{h^2}AU + F, \quad (7)$$

где $U = \left(u_1,\ u_2,...,\ u_{N+1}\right)^*$,

$$F = \left(f_1 + \frac{1}{h^2}\mu_0,\ f_2,...,\ f_N,\ f_{N+1} + \frac{2}{h}q_{N+1} \right)^*,$$

$$A = \left\| a_{p,q} \right\|_{N+1} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & & ... & & ... & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 2 & -2 \end{Vmatrix}_{N+1}. \quad (8)$$

Здесь и далее индексы искомых элементов матриц меняются от 1 до $N+1$. Верхний знак «*» означает операцию транспонирования матрицы.

Матрицу A можно представить в виде произведения [2]:

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

где V и Λ – неизвестные матрицы, а V^{-1} является обратной V матрицей.

Умножим это равенство на V^{-1} слева и, с учетом $V^{-1}V = E$, получим:

$$V^{-1}A = \Lambda V^{-1}. \quad (9)$$

Если матрицу Λ считать диагональной, то по положениям линейной алгебры [3], её элементы составляют собственные значения (числа) λ_s матрицы A, а матрица $V^{-1} = \left\| v^-_{s,p} \right\|$ состоит из компонентов $v^-_{s,p}$ собственных векторов матрицы A. Отсюда следует, что нам необходимо найти собственные числа λ_s матрицы A и составить с их помощью диагональную матрицу $\Lambda = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{N+1}\}$.

Раскрытие равенства (9) относительно собственного числа λ_s по элементам приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \left(-2-\lambda_s\right)v^-_{s,1} + v^-_{s,2} = 0, \\ v^-_{s,k-1} + \left(-2-\lambda_s\right)v^-_{s,k} + v^-_{s,k+1} = 0 \quad \text{при} \quad k = 2..N-1, \\ v^-_{s,N-1} + \left(-2-\lambda_s\right)v^-_{s,N} + 2v^-_{s,N+1} = 0, \\ v^-_{s,N} + \left(-2-\lambda_s\right)v^-_{s,N+1} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

При введении замены $-2-\lambda = 2\cos\theta_s$ условие нетривиальности решения системы приводит к уравнению

$$\cos\left(N+1\right)\theta_s = 0.$$

Определения значений θ_s при $s = 1, 2, 3, ..., N+1$ и обратный переход к собственным числам λ_s матрицы *A* дают:

$$\lambda_s = -2\left(1+\cos\frac{2s-1}{2\left(N+1\right)}\pi\right). \quad (12)$$

При подстановке значений λ_s в систему (10) приходим к задаче о собственных векторах основной матрицы системы уравнений (1) [3]. Поиск составляющих *s*-го собственного вектора пропорциональных алгебраическим дополнениям первой строки основной матрицы системы (10) и нормирование вектора приводят к определению элементов матрицы V^{-1}:

$$v^-_{s,p} = \frac{\left(-1\right)^{s+p}}{\sqrt{2N+1}} \begin{cases} 2\cos\left(N+1-p\right)\theta_s & \text{при} \quad p \le N, \\ 1 & \text{при} \quad p = N+1. \end{cases}$$

Значения элементов матрицы V, необходимой для обратного перехода к искомым сеточным функциям, определяли методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу [4].

Вернемся к уравнению (7) и умножим его обе стороны на V^{-1} слева. С учетом свойств операций дифференцирования и умножения матриц, получим

$$\frac{dV^{-1}U}{dt} = \frac{1}{h^2} V^{-1} AU + V^{-1} F \ .$$

Т.к. $A = V \Lambda V^{-1}$, то $V^{-1} AU = V^{-1} V \Lambda V^{-1} U = \left(V^{-1} V\right) \Lambda \left(V^{-1} U\right) = \Lambda \bar{U}$.

Отсюда следует, что, если ввести новый вектор-столбец

$$\bar{U} = \left(\bar{u}_1 \ , \ \bar{u}_2 \ , ..., \ \bar{u}_{N+1}\right)^* = \left(\sum_{p=1}^{N+1} v_{1,p}^{-} u_p , \ \sum_{p=1}^{N+1} v_{2,p}^{-} u_p , ..., \ \sum_{p=1}^{N+1} v_{N+1,p}^{-} u_p \right)^* , \quad (13)$$

то уравнение приобретает вид

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{1}{h^2} \Lambda \bar{U} + \bar{F} , \quad (14)$$

где $\bar{F} = \left(\bar{f}_1 \ , \ \bar{f}_2 \ , ..., \ \bar{f}_{N+1}\right)^* = \left(\sum_{p=1}^{N+1} v_{1,p}^{-} F_p , \ \sum_{p=1}^{N+1} v_{2,p}^{-} F_p , ..., \ \sum_{p=1}^{N+1} v_{N+1,p}^{-} F_p \right)^*$,

F_p – *p*-й элемент вектор-столбца F .

Из (14) можно выделить отдельное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\bar{u}_i$:

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{\lambda_i}{h^2} \bar{u}_i + \bar{f}_i \ . (15)$$

Для решения уравнения (15) можно использовать аппроксимационную схему назад [5]:

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n}{\tau_n} = \frac{\lambda_i}{h^2} \bar{u}_i^{n+1} + \bar{f}_i^{n+1} , \quad (16)$$

где τ_n – постоянное или переменное значение *n*-го шага «времени» *t*, значение которого выбирается согласно интервалу изменения значений функций $\bar{f}_i^{n+1}$, $\mu_0(t)$ и $q_l(t)$, а также их производных.

Из (16) составляется рекуррентное соотношение для *i*-го узла:

$$\bar{u}_i^{n+1} = \frac{\bar{u}_i^n + \tau_n \bar{f}_i^{n+1}}{1 - \lambda_i \tau_n / h^2} . \quad (17)$$

Оно реализуется для $n = 0, 1, ...$ Для первого применения его нужны значения $\bar{u}_i^0$ при $i = 1..N+1$, которые вычисляются согласно формуле:

$$\bar{u}_i^0 = \sum_{p=1}^{N+1} v_{i,p}^{-} u_p^0 ,$$

где значения u_p^0 берутся из начального условия (4).

Расчеты по формуле (17) приводят к результату относительно $\bar{u}_i^{n+1}$. Обратный переход к u_i^{n+1}, т.к. $U = V\bar{U}$, осуществляется по формуле

$$u_i^{n+1} = \sum_{p=1}^{N+1} v_{i,p} \bar{u}_p^{n+1} .$$

Программное обеспечение. По представленному выше материалу составлена программа для изучения динамики термического состояния одномерной массы при реализации граничного условия первого рода при $x = 0$ и условия второго рода при $x = l$. Она состоит из частей описания скалярных,

векторных и матричных величин, ввода исходных данных, формирования и проверки матриц V, Λ, V^{-1}, формирования начального условия для $\bar{u}_i^{n+1}$, вычислений в цикле по времени и условной печати.

В цикле по *n* формировали граничные условия и свободные члены для u_i^n и $\bar{u}_i^n$, а также вычисляли значения u_0^{n+1} и $\bar{u}_i^{n+1}$.

Через заданные шаги по времени осуществляли переход к u_i^{n+1} и сохраняли значения «времени» и u_i^{n+1} для дальнейшей визуализации и анализа результатов.

Расчеты проводились для 51 расчетного равноотстоящего узла по длине *l*. Шаг по «времени» составлял $0.001\ i^2$. Через каждые 20 шагов по времени осуществляли переход к исходной функции и данные записывали в новом файле.

Вычислительный эксперимент. Пробные расчеты проводились при $f(x,t)=0$ для граничных условий $\mu_0(t)=U_0=const$, $q_l(t)=Q_0=const$ и начального условия $T(x,0)=\varphi(x)$. Аналитическое решение уравнения (3) этой задачи приведено в [6]. Сравнение результатов показало, что при малых «временах» результаты совпадают в рамках точности графического представления.

Ограничимся приведением результатов расчета при $q_l(t)=5^0\ C/i$ и

$$f(x,t)=\begin{cases}5^0\,C/i^2 & \text{при } \tilde{o}=0.3\ i,\\ -10^0\,C/i^2 & \text{при } \tilde{o}=0.7\ i,\\ 0^0\,C/i^2 & \text{при } \tilde{o}\neq 0.3 \text{ и } \tilde{o}\neq 0.7\ i.\end{cases}$$

Наблюдается сложная картина теплообмена. До $t=0.5\ i^2$ кривые температуры имели локальные минимумы. А на границе $x=l$ имеет место монотонное, но медленное возрастание температуры.

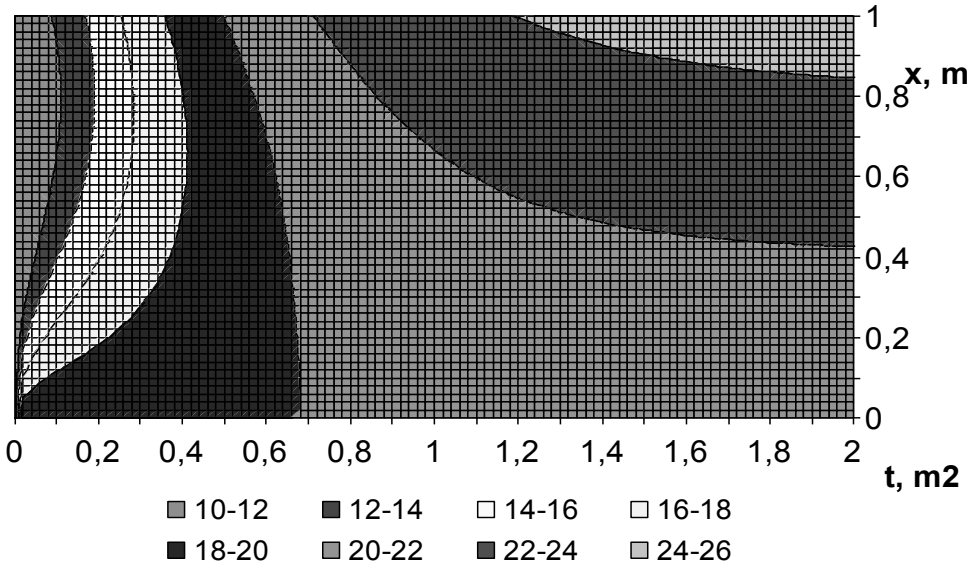

Рисунок. Изменение температурного поля однородного стержня по t. $l=1\ m$, $N=50$, $\tau=0.001\ m^2$, $T_0(x)=10^0C$, $T(0,t)=20^0C$, $q_l(t)=5^0\ C/i$.

Таким образом, в рамках данной статьи продемонстрированы особенности дифференциально-разностного метода решения параболического уравнения. Основным успехом работы является то, что аналитическим путем определены собственные числа и векторы матрицы перехода *A* для граничных условий первого и второго родов при $x=0$ и $x=l$ соответственно. Их можно использовать при решении одно- и многомерных задач теплопередачи, фильтрации, теории упругости ..., что позволяет значительно сократить время расчета на ЭВМ.

Литература:

1. Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Т.: Фан, 1983. – 112 с.

2. Фаддеева В.Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. – Тр. МИ АН СССР, 1949, том 28. – С. 73-103. (Из Общероссийского математического портала Math-Net).

3. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз,1963.

4. Копчёнова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах.– М.: Наука, 1972.– 368 с.

5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

6. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972. – 688 с.

Андижон машинасозлик институти,
Тошкент ахборот технологиялари университети
2017 йил 20 мартда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. И.Алимов)