АЛГОРИТМ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ СТЕФАНА С ФРОНТОМ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ

Ф.А.Алиев, Ж.И.Хужаев

Қотиш жараёни учун бир ўлчовли Стефан масаласининг ечими учун ҳисоблаш алгоритми таклиф этилган. Сувнинг музлаши мисолида олинган натижалар келтирилган. Ишнинг натижасини бошқа моддалар учун ҳам қўллаш мумкин.

Калит сўзлар: *иссиқлик алмашинуви, фаза ўзгариши, қотиш фронти, Стефан масаласи, ҳисоб тажрибаси.*

Предложен алгоритм расчета решения одномерной задачи Стефана для процесса затвердевания и разработана программа расчета. Приведены результаты вычислительного эксперимента по оледенению воды. Результаты работы с успехом можно применять и для других веществ.

Ключевые слова: *теплообмен, фазовый переход, фронт затвердевания, задача Стефана, вычислительный эксперимент.*

The article offers the algorithm of calculation of one measured task of Stephan for process of chilling and created the calculation programm. It also contains the results of calculation of experiments on chilling water. The results of the work can successfully be used for other substance as well.

Key words: *heat-transfer, phase transformation, front chilling, Stephan's task, calculation experiment.*

Фазовый переход – изменение агрегатного состояния вещества или его части является неотъемлемым атрибутом различных технологических процессов и природных явлений. В процессе фазового перехода скачкообразно изменяются физические и тепловые параметры вещества. Изучение процесса достаточно трудоемко и требует привлечения дорогостоящего оборудования и специалистов различной профессии. Использование положений математического моделирования и вычислительного эксперимента позволяет обходиться без этих ресурсов и получить результаты по исследуемому объекту. При этом возникают трудности другого характера. Ниже обращаемся к известной задаче Стефана [1] и демонстрируем пути преодоления таких трудностей.

Одномерная задача затвердевания жидкости в [1] поставлена следующим образом. Исходная температура жидкости – T_v. При $t \geq 0$ в сечении $x=0$ поддерживали постоянную температуру T_l, которая меньше температуры плавления T_*. Образуется фронт затвердевания, который перемещается со-

гласно закону $\xi(t)$, притом $\xi(0)=0$. При скорости продвижения фронта $\frac{d\xi}{dt}$ выделяется тепло, равное $L\rho_2\frac{d\xi}{dt}$, где *L* – скрытая теплота плавления массы; ρ_2 – плотность жидкости. (Изменением плотности вещества при фазовом переходе пренебрегается.)

Изменение температуры в твердой фазе $T_1(x,t)$ и жидкой фазе $T_2(x,t)$ описывается уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial T_1}{\partial t}&=a_1^2\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \quad при \quad 0<x<\xi(t),\\ \frac{\partial T_2}{\partial t}&=a_2^2\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \quad при \quad \xi(t)<x<\infty.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Налагаются следующие условия:

$$\left.\begin{aligned}T_2)x,0(=T_v \quad при \quad x\ge 0,\\ T_1)0,t(>T_l \quad при \quad t=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

На фронте затвердевания $x=\xi(t)$ с двух сторон температуры сред взаимно равны и составляют температуру плавления

$$T_1(\xi,t)=T_2(\xi,t)=T_*. \tag{3}$$

Тепловой баланс на фронте затвердевания описывается уравнением

$$\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi}-\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi}=L\rho\frac{d\xi}{dt}. \tag{4}$$

Здесь λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности твердой и жидкой фаз; a_1^2, a_2^2 – коэффициенты температуропроводности твердой и жидкой фаз.

Решение (1) ищется в виде

$$T_1(x,t)=A_1+B_1\Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right),$$

$$T_2(x,t)=A_2+B_2\Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right);$$

где $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\varsigma^2}d\varsigma$ – интеграл ошибок; A_1, B_1, A_2, B_2 – неизвестные пока коэффициенты.

Из (2) следуют $T_1(0,t)=A_1=T_l$; $T_2(\infty,t)=A_2+B_2=T_v$.

Из (3) следуют

$$A_1+B_1\Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right)=0,\ A_2+B_2\Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right)=0.$$

Такое возможно, если выполняется условие $\frac{\xi}{\sqrt{t}}=const.$

Отсюда следует, что

$$\xi=\alpha\sqrt{t}\ - \tag{5}$$

есть закон движения границы замерзания.

Находим значения коэффициентов

$$A_1=T_l,\quad B_1=\frac{T_*-T_l}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)},\quad A_2=-\frac{(T_v-T_*)\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)},\quad B_2=\frac{T_v-T_*}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \tag{6}$$

Значения (6) вставим в условие (4) и, учитывая $\frac{d\xi}{dt}=\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}$, получим

$$\lambda_1\frac{T_l-T_*}{a_1\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}+\lambda_2\frac{T_v-T_*}{a_2\left[1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}=-L\rho_2\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (7)$$

Уравнение (7) представим в виде

$$f(\alpha)=\beta_1\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}+\beta_2\frac{e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}+\alpha=0,$$

где $\beta_1=\frac{2\lambda_1(T_l-T_*)}{\sqrt{\pi}a_1L\rho_2}\ (<0),\quad \beta_1=\frac{2\lambda_2(T_v-T_*)}{\sqrt{\pi}a_2L\rho_2}\ (>0).$

Значение интеграла ошибок вычислим по аппроксимационной формуле [2]

$$\Phi(x)=1-\left(a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4+a_5t^5\right)e^{-x^2}+\varepsilon(x),$$

где $t=\frac{1}{1+px}$,

$p=0,3275911,\quad a_1=0,254829592,\quad a_2=-0,284496736,$

$a_3=1,421413741,\quad a_4=-1,453152027,\quad a_5=1,061405429.$

Точность такой аппроксимации составляет $|\varepsilon(x)|\le 1,5\cdot10^{-7}$.

Функция $f(\alpha)$ непрерывная и при α=0 имеет значение –∞, а при $\alpha\to\infty$ имеет – +∞. Она монотонно возрастает и имеет хотя бы одно нулевое значение в промежутке $\alpha\in(0;\infty)$.

Решили трансцендентное уравнение в двух этапах.

В первом этапе выделяли промежуток принадлежности корня. Выбирали шаг h (h=0,01). Учитывали $f(0)=-\infty$. Вычисляли $f(h)$. Если $f(h)>0$, то $\alpha\in(0;h)$. Иначе вычисляли $f(2h)$. Если $f(2h)>0$, то $\alpha\in(h;2h)$. И так далее до достижения $f(kh)>0$. В результате осуществления первого этапа находили, что промежуток, где находится корень, есть $((k-1)h;kh)$.

На втором этапе уточняли значение α, принимая $\alpha_л=)k-1(h,\quad \alpha_n=kh$. Притом $f)\alpha_л(<0,\quad f)\alpha_n(>0$.

Реализовывали метод дихотомии. Вычисляли $\alpha_1=\frac{x_л+x_n}{2}$ и $f(\alpha_1)$. Если $f(\alpha_1)<0$, то принимали $x_л=\alpha_1$; иначе принимаем $x_n=\alpha_1$. Вычисляли $\alpha_2=\frac{x_л+x_n}{2}$ и $f(\alpha_2)$. Если $f(\alpha_2)<0$, то принимали $x_л=\alpha_2$; иначе принимали $x_n=\alpha_2$. И так далее. 20 шагов итерации обеспечат точность 10^{-6}. С учетом точности выделения промежутка 10^{-2} корня точность нахождения α составит 10^{-8}, что считаем достаточным для нашего случая.

При фиксированном значении t вычисляли местоположение фронта фазового перехода (5), что позволило построить кривую температуры по формулам

$$T_1(x,t)=T_l+\frac{T_*-T_l}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}\Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right)\text{ при } x<\xi(t),$$

$$T_2(x,t)=\frac{T_v-T_*}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}\left(\Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right)\text{ при } x\ge\xi(t).$$

По данному алгоритму составили программу на языке Турбо-Паскаль и провели вычислительный эксперимент по оледенению воды.

В качестве исходных данных брали постоянные:

c_1=2,261$_{10}$3 *Дж кг*$^{-1}$*К*$^{-1}$, c_2=4,618$_{10}$3 *Дж кг*$^{-1}$*К*$^{-1}$,

λ_1=2,250$_{10}$3 *Вт м*$^{-1}$*К*$^{-1}$, λ_2=0,4218$_{10}$3 *Вт м*$^{-1}$*К*$^{-1}$,

ρ_1=916,20 *кг м*$^{-3}$, ρ_2=999,87 *кг м*$^{-3}$, *L*=3,335$_{10}$5 *Дж кг*$^{-1}$.

Значение коэффициентов температуропроводности посчитали по формулам $a_1^2 = \dfrac{\lambda_1}{c_1\rho_1}$, $a_2^2 = \dfrac{\lambda_2}{c_2\rho_2}$, где c_1, ρ_1, c_2, ρ_2 – удельные теплоемкости и плотности льда и воды.

Кратко остановимся на результатах вычислительного эксперимента.

При $T_l = -20°C$, $T_v = 10°C$ получили $f(0,01) = -0.026135217$ и $f(0,02) = 0.005440078$. Соответственно, определили промежуток корня $\alpha \in (0,01; 0,02)$. Далее реализовали метод деления отрезка пополам. Значения функции $f(\alpha_k)$ составляли: – 0,006876057, – 0,000220486… И при 20-м шаге имели α=0,017590818 и $f(\alpha_{20}) = 0,000000018$.

При других значениях T_l и T_v также получены аналогичные результаты.

На рис. 1 приведены кривые значения параметра α, полученные при $T_l = -20, -15, -10, -5, -1°C$ в промежутке $T_v \in [0°C, 20°C]$. Соответствующие кривые расположились сверху вниз. Качественно это соответствует тому, что с убыванием значения T_l параметр α увеличивается. А с увеличением значения T_v значение α убывает. В целом, при возрастании разницы T_v–T_l проникновение фронта затвердевания в толщу воды замедляется.

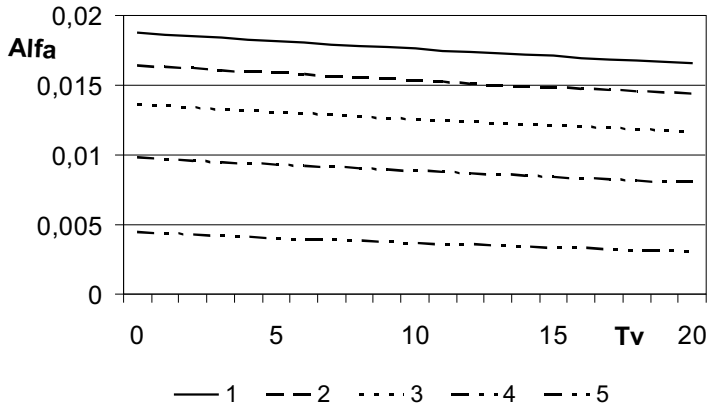

Рис. 1. Изменение значения параметра *α* в зависимости от исходной температуры T_v при различных значениях температуры охлаждения T_l: 1 – -20^{0}C, 2 – -15^{0}C, 3 – -10^{0}C, 4 – -5^{0}C, 5 – -1^{0}C.

На рис. 2 продемонстрированы графики изменения температуры, полученные при $T_l = -20°C$, $T_v = 10°C$. Расчеты проводились для толщины 5 м и для отрезка времени 60 минут с шагом 10 минут. По расчетам получили значение α=0,017590818. Проникновение фронта за час составило примерно 1.05 м. Заметно, что с течением времени скорость проникновения фронта оледенения замедляется.

На следующем рисунке приведены графики температуры через каждые 10 минут времени, полученные при $T_l = -10°C$, $T_v = 20°C$. Значение параметра α составило 0.011649752. Проникновение фронта за час составило примерно 0.75 м. В этом случае с течением времени становится заметным излом в графике температуры при прохождении через фронт фазового перехода.

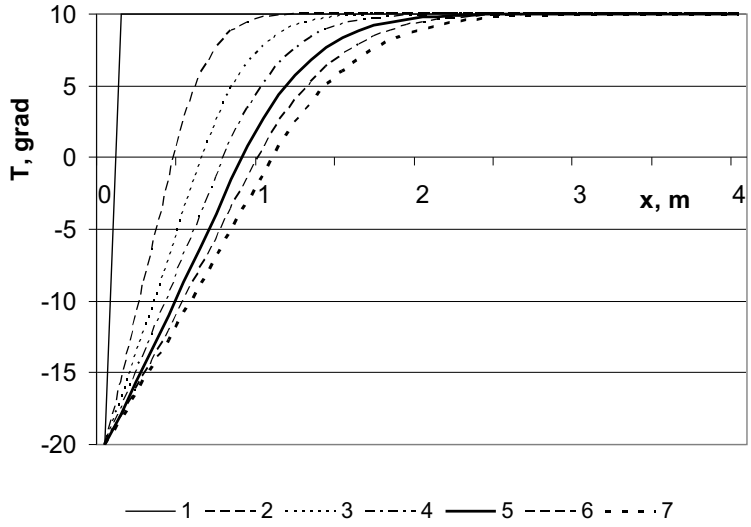

Рис. 2. Изменения температуры при различных промежутках времени процесса оледенения, полученные при $T_l = -20°C, \quad T_v = 10°C$:
1 – 0, 2- 10, 3 – 20, 4 – 30, 5 – 40, 6 – 50 и 7 – 60 минут.

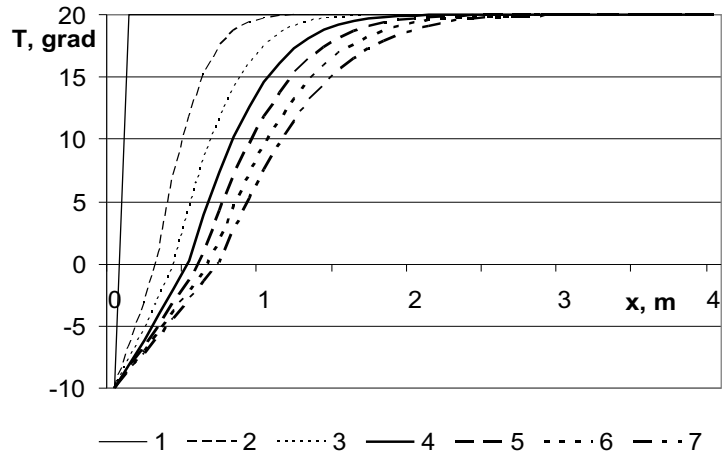

Рис. 3. Изменение температуры при различных временах процесса оледенения, полученные при $T_l = -10°C, \quad T_v = 20°C$:
1 – 0, 2- 10, 3 – 20, 4 – 30, 5 – 40, 6 – 50 и 7 – 60 минут.

В целом, в зонах каждой фазы решение имеет линейный характер. А условие сопряжения энергии вносит элемент нелинейности в решение, тем и определяется характер изменения температуры по времени *t* и координате *x*.

На основе составленных алгоритма и программы можно рассчитать процессы затвердевания других веществ, соответствующим образом выбирая значения термодинамических параметров вещества.

Литература:

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М.Абрамовича и И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Андижон машинасозлик институти,
Тошкент ахборот технологиялари университети.
2015 йил 25 мартда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. И.Алимов)