АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ U – СТАТИСТИКИ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ОБЪЕМЕ ВЫБОРКИ (ЧАСТЬ-II)

С.А.Ахмедов, А.Г.Абдуллаев

Мақолада танламалар сони N_n тасодифий миқдор бўлган ҳолда қурилган U – статистика учун Роббинс типидаги бир лимит теорема исботланган. Теоремада танланма ҳажми N_n нинг кузатиш натижалари ξ_i лардан боғлиқсизлиги талаб этилмайди $(i = 1,2,...)$, аммо $n \to \infty$ да шундай k_n – сонлар кетма-кетлиги $(k_n \to \infty)$ ва N_0 мусбат тасодифий миқдор мавжуд бўлиб $\frac{N_n}{k_n} \xrightarrow{p} N_0$, бўлишлиги талаб этилади.

Калит сўзлар: *тасодифий миқдор, U –статистика, асимптотик нормал, боғлиқсизлик, нотасодифий, тасодифий ҳажмли танланма.*

В статье доказана теорема типа Роббинса для U – статистики при случайном объеме выборки в случае, когда не предполагается независимость объема выборки N_n от самих результатов наблюдения ξ_i при любом i, причем, предполагается, что $\frac{N_n}{k_n} \xrightarrow{p} N_0$ при $n \to \infty$, где k_n последовательность чисел такая, что $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $n \to \infty$ – положительная с.в.

Ключевые слова: *случайная величина, U – статистики, асимптотически нормально, независимость, детерминированный, случайный объем выборки.*

In this article the theorem of the type of Robbins for the statistics – U built when the number of sample is N_n random quantity. In case when the independence of the size of sample N_n is not assumed from results of observation ξ_i in any i, though $\frac{N_n}{k_n} \xrightarrow{p} N_0$ is assumed in $n \to \infty$, where $k_n$order of numbers $k_n \to \infty$ in $n \to \infty$ and N_0 is positive random variables.

Key words: *random quantity, statistics – U, asymptotic normality, independence, determined, random size of sample.*

Пусть $\{\xi_i\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.). Образуем статистику вида:

$$U_n = (C_n^k)^{-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} f(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}) = (C_n^k)^{-1} \sum_{(n,k)} f(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k}),$$

которые принято называть U – статистиками. Здесь $f(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_k})$ некоторая функция, симметричная относительно своих аргументов. Обозначим

$$\theta = M f(\xi_1, \ldots, \xi_k), \quad f_m(x_1, \ldots, x_m) = M f(x_1, \ldots, x_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_k)$$

$$(m \le k), \; l_2 = D f_1(\xi_1).$$

U – статистики впервые ввел В. Хефдинг [1] и при условии (X): $M f^2(\xi_1, \ldots, \xi_k) < \infty$, $l_2 \neq 0$ доказал, что последовательность с.в.

$Z_n = \frac{\sqrt{n}}{k\sqrt{l_2}}(U_n - \theta)$ – асимптотически нормально с параметрами (0,1).

Далее интенсивно изучались различные свойства U – статистики при детерминированном объеме выборки. При случайном объеме выборки предельное поведение U – статистики рассматривалась в работах К. Атила [2], Р. Спроула [3] и др.

Пусть $\{N_n\}$ – последовательность положительных целочисленных с.в., заданных на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$, где и задана последовательность с.в. $\{\xi_n\}$.

В работе [2] доказано, что если при $n \to \infty$ последовательность с.в. $\left\{\frac{N_n}{n}\right\}$ стремится к единице по вероятности, то $P\left(Z_{N_n} < x\right) \to \Phi\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$ (1)

В этой работе также получена скорость сходимости в предельном соотношении (1). В [3] соотношение (1) доказано при условии

$$\frac{N_n}{n} \xrightarrow{p} N_0 \quad n \to \infty,$$

где $N_0 > 0$ – дискретная с.в.

А в работе [4] это соотношение доказано при условии, что N_0 – положительная с.в.

Пусть теперь $\alpha_n = MN_n$, $\beta_n = DN_n$

$$\tilde{Z}_{N_n} = \frac{\sqrt{\alpha_n}}{k\sqrt{l_2}}\left[\left(C_{a_n}^k\right)^{-1} \Sigma_{(N_n,k)} f\left(\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k}\right) - \theta\right],$$

где

$$C_{\alpha_n}^k = \frac{\alpha_n\left(\alpha_n - 1\right)\ldots\left(\alpha_n - k + 1\right)}{k!}.$$

Тогда справедливо следущее.

Теорема. Пусть соблюдено предположение (X), а также выполнены следующие условия: при $n \to \infty$

(I) $$\alpha_n \to \infty,\ \beta_n = o\left(\alpha_n^2\right);$$

(II) $$\frac{N_n - \alpha_n}{\sqrt{\beta_n}} \xrightarrow{p} \tau_0.$$

Тогда

$$\left|\tilde{P}_n\left(x\right) - \tilde{G}_n * \Phi\left(x\right)\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ где}$$

$$\tilde{P}_n\left(x\right) = P\left(Z_{N_n} < x\right),\ \tilde{G}_n\left(x\right) = P\left(\frac{N_n - \alpha_n}{\sqrt{\beta_n}}\sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha_n}}\frac{\theta}{\sqrt{l_2}} < x\right).$$

Если в теореме предположить, что N_n не зависит от ξ_i при любом i, то условие (II) является излишним. А если предположить, что N_n не зависит от ξ_i при любом i, и $k = 1$, то из теоремы 2 вытекает некоторый аналог теоремы X. Роббинса [5].

Из теоремы получаем следующее следствие.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда справедливы утверждения: при $n \to \infty$

1) если $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to 0$, то $\tilde{P}_n\left(x\right) \to \Phi\left(x\right)$;

2) если $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to C$, то $\tilde{P}_n\left(x\right) \to G_0 * \Phi\left(x\right)$, где $G_0\left(x\right) = P\left(\tau_0 \cdot \theta\sqrt{c / l_2} < x\right)$;

3) если $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to \infty$, то

$$\tilde{P}\,)x(\to I_{\infty})x(=\{\begin{matrix}0, & \text{если } x<\infty\\ 1, & \text{если } x=\infty\end{matrix}$$

Доказательство теоремы. Для любого $\varepsilon>0$ выберем точки

$$a=b_0<b_1<\cdots<b_m=b$$

из множества точек непрерывности ф.р. $P(\tau_0<x)$ так, что

$$P(a\le\tau_0<b)\ge 1-\varepsilon/3$$

и

$$\max_{1\le i\le m}|b_i-b_{i-1}|=\varepsilon_m\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Обозначим

$$A_0=(a\le\tau_0<b),\ \ A_0^j=(b_{j-1}\le\tau_0<b_j)\ ,$$

$$A_n=(\alpha_n+a\sqrt{\beta_n}\le N<\alpha_n+b\sqrt{\beta_n}),\ N=N_n,$$

$$A_n^{(j)}=(\alpha_n+b_{j-1}\sqrt{\beta_n}\le N<\alpha_n+b_j\sqrt{\beta_n}),\ n_j=[\alpha_n+b_j\sqrt{\beta_n}].$$

По формуле полной вероятностей

$$\sum_{j=1}^{m}P(\tilde{Z}_N<x,A_n^{(j)})\le\tilde{P}_n(x)\le\sum_{J=1}^{m}P(\tilde{Z}_N<x,A_n^{(j)})+P(\bar{A}_n).\qquad(2)$$

Пусть

$$\rho_{nj}=\max_{n_{j-1}\le s\le n_j}\left|\sum_{(s,k)}\left(f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k)-\theta\right)-\sum_{(n_{j-1},k)}\left(f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k)-\theta\right)\right|.$$

Тогда нетрудно увидеть, что

$$\boldsymbol{U}_{nj}^{-}\subset(\tilde{Z}_N<x,A_n^{(j)})\subset\boldsymbol{U}_{nj}^{+},\qquad(3)$$

где

$$\boldsymbol{U}_{nj}^{\pm}=(Z_{n_{j-1}}<\frac{\sqrt{n_{j-1}}}{\sqrt{\alpha_n}}\frac{C_{\alpha_n}^k}{C_{n_{j-1}}^k}x-\frac{C_N^k-C_{\alpha_n}^k}{C_{n_{j-1}}^k}\frac{\theta\sqrt{n_{j-1}}}{k\sqrt{l_2}}\pm\frac{\rho_{nj}\sqrt{n_{j-1}}}{C_{n_{j-1}}^k k\sqrt{l_2}},\ A_n^{(j)})$$

Так как при выполнении события $A_n^{(j)}$:

$$\alpha_n+b_{j-1}\sqrt{\beta_n}-\varepsilon_m\sqrt{\beta_n}\le N\le\alpha_n+b_{j-1}\sqrt{\beta_n}+\varepsilon_m\sqrt{\beta_n},$$

то нетрудно убедиться, что существуют числа $n_o(\varepsilon)$ и $m_o(\varepsilon)$ такие, что при $n>n_o(\varepsilon)$ $n>n_o(\varepsilon)$, $n>m_o(\varepsilon)$,

$$k\sqrt{\beta_n/\alpha_n}\left(b_{j-1}-\varepsilon\right)\le\frac{C_N^k-C_{\alpha_n}^k}{C_{n_{j-1}}^k}\sqrt{n_{j-1}}\le k\sqrt{\beta_n/\alpha_n}\left(b_{j-1}+\varepsilon\right)\qquad(4)$$

В силу условия (I) существует $n_1(\varepsilon)$, что при $n>n_1(\varepsilon)$

$$1-\varepsilon\le\frac{\sqrt{n_{j-1}}}{\sqrt{\alpha_n}}\frac{C_{\alpha_n}^k}{C_{n_{j-1}}^k}\le 1+\varepsilon\qquad(5)$$

Принимая во внимание (4) и (5), из (3) будем иметь (для достаточно больших n и m)

$$B_{nj}^{-} \subset \left(\tilde{Z}_N < x, A_n^{(j)}\right) \subset B_{nj}^{+}, \tag{6}$$

где

$$B_{nj}^{\pm} = (Z_{n_{j-1}} < (1 \pm \varepsilon) - \frac{\theta}{\sqrt{l_2}} \sqrt{\beta_n / \alpha_n} \left(b_{j-1} \pm \varepsilon\right) \pm \frac{\rho_{nj} \sqrt{n_{j-1}}}{C_{n_{j-1}}^{k} k \sqrt{l_2}}, A_n^{(j)}.$$

Введем событие

$$D_{nj} = \left(\frac{\rho_{nj} \sqrt{n_{j-1}}}{C_{n_{j-1}}^{k} k \sqrt{l_2}} < \varepsilon \right).$$

Тогда из (6) и (2) получим

$$\sum^{-} - \sum_{j=1}^{m} P\left(\bar{D}_{nj},\ A_n^{(j)}\right) \le \tilde{P}_n(x) \le \sum^{+} + \sum_{j=1}^{m} P\left(\bar{D}_{nj},\ A_n^{(j)}\right) + P\left(\bar{A}_n\right), \tag{7}$$

где

$$\sum^{\pm} = \sum_{j=1}^{m} P(Z_{n_{j-1}} < x(1 \pm \varepsilon) - \frac{\theta}{\sqrt{l_2}} \sqrt{\beta_n / \alpha_n} (b_{j-1} \pm \varepsilon) \pm \varepsilon, A_n^{(j)}$$

Анологично рассуждениям и выкладкам, использованным при оценивании Σ_1 в ходе доказательства теоремы в работе [4], нетрудно убедиться в следующем: существуют $n(\varepsilon)$ и $m(\varepsilon)$ такие, что при $n > n(\varepsilon)$, $m > m(\varepsilon)$ будем иметь

$$\sum_{j=1}^{m} P\left(\bar{D}_{nj}, A_n^{(j)}\right) \le \varepsilon \tag{8}$$

Далее, применяя лемму 1 (см. [4]) в выражениях $\Sigma^{\pm}$, событие $A_n^{(j)}$ заменим событием $A_0^{(j)}$, а затем, используя *R* – перемешиваемость последовательности с. в. $\{Z_n\}$ из (7) и (8) для достаточно больших n и m, имеем

$$W_{nm} - c\varepsilon \le \tilde{P}_n(x) \le W_{nm} + c\varepsilon, \tag{9}$$

где

$$W_{nm} = \sum_{j=1}^{m} \Phi\left(x - \frac{\theta}{\sqrt{l_2}} \sqrt{\beta_n / \alpha_n} b_{j-1} \right) [\mathrm{G}(b_j) - \mathrm{G}(b_{j-1})],$$

$$G(u) = P(\tau_o < u).$$

Ясно, W_{nm} что интегральная сумма для

$$J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(x - \frac{\theta}{\sqrt{l_2}} \sqrt{\beta_n / \alpha_n} u \right) dG(u)$$

Отсюда, выбирая разбиение [*a, b*] так, чтобы

$$J_n - \varepsilon \le W_{nm} \le J_n + \varepsilon$$

и из (9) в силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$, получим утверждение теоремы.

Литература:

1. Hoeffding W. The strong law of large numbers for U-statistics.- Inst. Of Stat. Univ. of N. Carolins, Mimeograph Series, N 302,1961.

2. Attila C. A theorem on departure of randomly indexed U – statistics from normality with an application in fixed-width sequential interval estimation.- Sankhya: The Indian J. Stat. v.43 1981, ser.A,1, p. 84-89.

3. Sproule R. Asymptotic properties of U- statistics. - Trans. Amer. Math. Soc.,v199,1974,p.55-64.

4. Ахмедов С.А., Абдуллаев А. Г. Асимптотическое поведение U – статистики при случайном объеме выборки. (часть-I) - Илмий хабарнома, АДУ, 2014.- №1.- Б.5-10

5. Robbins H. The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. -- Bull. Amer. Math. Soc.,54,1948,p.1151-1161.

Андижон давлат университети,
Андижон машинасозлик институти
2015 йил 24 июлда қабул қилинган.
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)