ЗАДАЧА L – ПОИМКИ

Н.М.УМРЗАКОВ, Ж.ДЕХКОНОВ

Мақолада чизиқли дифференциал ўйинда таъқиб этиш масаласи ўрганилган бўлиб, |u|£r, ||v(*)||£s чегаралар қўйилган. Қочувчининг энергияси чегараланган бўлгани боис чекли вақтдан сўнг ўйин тугатилади.

Калит сўзлар: *дифференциал ўйин, таъқибчи, қочувчи.*

В статье рассматривается задача преследования для линейной дифференциальной игры при ограничениях |u|£r, ||v(*)||£s. Так как энергия убегающего ограничена, то за конечный момент времени преследование завершается.

Ключевые слова: *дифференциальная игра, преследующий, убегающий.*

The article discusses the problem of prosecution for linear differential game at restrictions |u|£r, ||v(*)||£s. As energy escaper is limited, for the final moment of time prosecution comes to the end.

Key words: *differential game, pursuit, evasion.*

Рассматривается дифференциальная игра

$$\dot{z} = Cz - u + v, \qquad (1)$$

где $z \in R^n$, C – линейное отображение пространства R^n в себя, $|u| \le 1$, $|v(\cdot)| \le \sigma$, σ – положительная константа. Терминальное множество имеет вид

$$M = \{z : z \in R^n, |\pi z| \le l\},$$

где π – оператор ортогонального проектирования R^n на L, L – некоторое подпространство R^n, l – заданное положительное число.

Определения 1. Будем говорить, что в игре (1) из начальной точки (начального положения) $z_0 \in R^n \setminus M$ можно завершить преследование за время $T(z_0)$, если существует функция $u = u(t,v)$, $0 \le t \le T(z_0)$, $v \in V$, $u(t,v) \in U$, такая, что для произвольной измеримой функции $v = v(t)$, $0 \le t \le T(z_0)$, $v(t) \in V$, функция $u(t,v(t))$, $0 \le t \le T(z_0)$, является измеримой и траектория $z = z(t)$, $0 \le t \le T(z_0)$, уравнения $\dot{z} = Cz - u(t,v(t)) + v(t)$, $z(0) = z_0$, попадает на M, т.е. $z(t) \in M$ при некотором $t = t' \in [0, T(z_0)]$. Число $T(z_0)$ называется временем преследования из точки z_0, функция $u(t,v)$, $0 \le t \le T(z_0)$, $v \in V$, – функцией преследования.

Под решением задачи преследования понимается:

1) нахождение начальных точек $z_0 \in R^n \setminus M$, из которых возможно завершение преследования в смысле введенного выше определения;

2) нахождение в явном виде или указание алгоритма построения функции преследования $u(t,v)$.

Решению задачи преследования посвящено большое количество исследований (см., например, [2-6].). В настоящей работе эта задача рассмотрена с несколько другой точки зрения; ниже функция u(t), 0£t£T, строится не так, как обычно. Получены достаточные условия, гарантирующие возможность завершения преследования из любого начального положения z_0.

Теорема 1. Пусть существуют положительная константа d, такая, что

$$\| e^{tC} \| \le d \qquad (2)$$

для всех $t > 0$. Тогда в игре (1) возможно завершение преследования и произвольной точки $z_0 \in R^n \setminus M$

за время

$$T(z_0) = d\,|\,z_0\,| + d^4 K\theta^2 (N-1),$$

где $K = \max(|\,z_0\,|,1)$, $\theta = \max(\sigma,1)$, $N = \left[\dfrac{cd^3(|\,z_0\,|+\sigma^2)}{l}\right]$, $c = [\,\pi\,]$, $[a]$ – целая часть числа a.

Доказательство. Пусть, $v(t)$, $t \geq 0$, – произвольная измеримая функция, $\|\,v(\cdot)\,\| \leq \sigma$. На сегменте $[0, t_1]$ мы положим

$$u(t) = \frac{1}{d\,|\,z_0\,|} e^{tC} z_0,$$

где $t_1 = d\,|\,z_0\,|$. Это функция непрерывная, следовательно, измеримая. Покажем, что она удовлетворяет $|\,u(t)\,| \leq 1$ при всех $t \in [0, t_1]$:

$$|\,u(t)\,| = \frac{1}{d\,|\,z_0\,|} \cdot |\,e^{tC} z_0\,| \leq \frac{1}{d\,|\,z_0\,|} \cdot \|\,e^{tC}\,\| \cdot |\,z_0\,| \leq \frac{1}{d\,|\,z_0\,|} \cdot d\,|\,z_0\,| = 1.$$

Решение уравнение (1) на сегменте $[0, t_1]$ имеет вид

$$z(t) = e^{tC}\left[z_0 - \int_0^t e^{-rC} u(r)dr + \int_0^t e^{-rC} v(r)dr\right] =$$

$$= e^{tC}\left[z_0 - \int_0^t e^{-rC} \cdot \frac{1}{d\,|\,z_0\,|} e^{rC} z_0 dr + \int_0^t e^{-rC} v(r)dr\right] =$$

$$= e^{tC}\left[z_0 - \frac{t}{d\,|\,z_0\,|} \cdot z_0 + \int_0^t e^{-rC} v(r)dr\right]$$

Учитывая $t_1 = d\,|\,z_0\,|$, имеем

$$z(t_1) = e^{t_1 C}\left[z_0 - \frac{t_1}{d\,|\,z_0\,|} \cdot z_0 + \int_0^{t_1} e^{-rC} v(r)dr\right] = \int_0^{t_1} e^{(t_1 - r)C} v(r)dr.$$

Поэтому

$$\pi z_1 = \pi z(t_1) = \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1 - r)C} v(r)dr.$$

Оценим $|\,z_1\,|$

$$|\,z_1\,| = \left|\int_0^{t_1} e^{(t_1 - r)C} v(r)dr\right| < \int_0^{t_1} \|\,e^{(t_1 - r)C}\,\| \cdot |\,v(r)\,|\,dr \leq d \cdot \int_0^{t_1} |\,v(r)\,|\,dr$$

$$\leq d\sqrt{t_1}\sigma_1 = d\sqrt{d\,|\,z_0\,|}\sigma_1 = d^{\frac{3}{2}}\,|\,z_0\,|^{\frac{1}{2}}\,\sigma_1 \leq d^3 K\theta^2. \qquad (3)$$

Предположим, что $z_1 \notin M$. Тогда получим

$$l < |\pi z_1| = \left| \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1 - r)C} v(r) dr \right| \le \|\pi\| \cdot \int_0^{t_1} \| e^{(t_1 - r)C} \| \cdot |v(r)| dr .$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$l < cd \int_0^{t_1} |v(r)| dr \le cd \sqrt{\int_0^{t_1} dr} \cdot \sqrt{\int_0^{t_1} v^2(r) dr} =$$

$$= cd\sqrt{t_1}\sigma_1 = cd\sqrt{d|z_0|}\sigma_1 \le cd^3 |z_0|^{1/2} \sigma_1 , \qquad (4.1)$$

где $\sigma_1 = \sqrt{\int_0^{t_1} v^2(r) dr}$.

На сегменте $[t_1, t_2]$ управляем преследующим следующим образом:

$$u(t) = \frac{1}{d|z_1|} e^{(t - t_1)C} z_1 ,$$

где $t_2 = t_1 + d|z_1|$. Нетрудно показать, что $|u(t)| \le 1$ при $t_1 \le t \le t_2$. Решение уравнения (1) на сегменте $[t_1, t_2]$ имеет вид

$$z(t) = e^{tC} \left[e^{-t_1 C} z_1 - \int_{t_1}^{t} e^{-rC} u(r) dr + \int_{t_1}^{t} e^{-rC} v(r) dr \right] =$$

$$= e^{tC} \left[e^{-t_1 C} z_1 - \int_{t_1}^{t} e^{-rC} \cdot \frac{1}{d|z_0|} \cdot e^{(r - t_1)C} z_1 dr + \int_{t_1}^{t} e^{-rC} v(r) dr \right] =$$

$$= e^{tC} \left[e^{-t_1 C} z_1 - \frac{t - t_1}{d|z_0|} \cdot e^{-t_1 C} z_1 + \int_{t_1}^{t} e^{-rC} v(r) dr \right]$$

Учитывая $t_2 = t_1 + d|z_1|$, имеем

$$z(t_2) = e^{t_2 C} \left[e^{-t_1 C} z_1 - \frac{t_2 - t_1}{d|z_0|} \cdot e^{-t_1 C} z_1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{-rC} v(r) dr \right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} e^{(t_2 - r)C} v(r) dr \cdot$$

Поэтому

$$\pi z_2 = \pi z(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \pi e^{(t_2 - r)C} v(r) dr .$$

Предположим $z_2 \notin M$. Тогда получим

$$l < |\pi z_2| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \pi e^{(t_2 - r)C} v(r) dr \right| \le cd\sqrt{t_2 - t_1} \cdot \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} v^2(r) dr} =$$

$$cd\sqrt{d|z_1|} \cdot \sigma_2 \le cd^{\frac{3}{2}} |z_1|^{\frac{1}{2}} \sigma_2 ,$$

где $\sigma_2 = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} v^2(r) dr}$.

Учитывая неравенство (3), получим

$$l < cd^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{2}} |z_0|^{\frac{1}{4}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \sigma_2 = cd^3 |z_0|^{\frac{1}{4}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \sigma_2 . \qquad (4.2)$$

Повторив предыдущие рассуждения, имеем

$$l < cd^3 \mid z_0 \mid^{\left(\frac{1}{2}\right)^3} \sigma_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \sigma_2^{\frac{1}{2}} \sigma_3, \tag{4.3}$$

. . . . . .

$$l < cd^3 \mid z_0 \mid^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \sigma_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} \ldots \sigma_{n-2}^{\frac{1}{2}} \sigma_{n-1}, \tag{4.n-1}$$

$$l < cd^3 \mid z_0 \mid^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} \sigma_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \ldots \sigma_{n-2}^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \sigma_{n-1}^{\frac{1}{2}} \sigma_n, \tag{4.n}$$

где $\sigma_i = \sqrt{\int_{t_{i-1}}^{t_i} v^2(r)dr}$.

Из неравенства (4.n) получим

$$l^2 < c^2 d^6 \mid z_0 \mid^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \sigma_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} \ldots \sigma_{n-2}^{\frac{1}{2}} \sigma_{n-1} \sigma_n^2 . \tag{5}$$

Перемножим неравенства (5) и (4.n-1)

$$l^3 < c^3 d^9 \mid z_0 \mid^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} \sigma_1^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}} \ldots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_n^2 . \tag{6}$$

Продолжив наши вычисления, получим неравенства

$$l^{n+1} < c^{n+1} d^{3(n+1)} \mid z_0 \mid \sigma_1^2 \cdot \ldots \cdot \sigma_{n-1}^2 \sigma_n^2 . \tag{7}$$

Поэтому

$$l < cd^3 \left(\mid z_0 \mid \sigma_1^2 \cdot \ldots \cdot \sigma_{n-1}^2 \sigma_n^2 \right)^{\frac{1}{n+1}} \leq$$

$$\leq cd^3 \cdot \frac{\mid z_0 \mid + \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2}{n+1} \leq \frac{cd^3 \left(\mid z_0 \mid + \sigma^2 \right)}{n+1},$$

где

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2 = \int_0^{t_1} v^2(r)dr + \int_{t_1}^{t_2} v^2(r)dr + \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} v^2(r)dr =$$

$$= \int_0^{t_n} v^2(r)dr \leq \int_0^{\infty} v^2(r)dr \leq \sigma^2 .$$

Из этого следует

$$n+1 < \frac{cd^3 \left(\mid z_0 \mid + \sigma^2 \right)}{l},$$

или

$$n \leq \left[\frac{cd^3 \left(\mid z_0 \mid + \sigma^2 \right)}{l} \right] - 1 = N - 1 .$$

Поэтому для некоторого $k, 1 \leq k \leq N$, $z_k = z(t_k) \in M$ и

$$t_k = d \mid z_0 \mid + d \mid z_1 \mid + \ldots d \mid z_{k-1} \mid . \tag{8}$$

Оценим $\mid z_i \mid$, $i = 2, 3, \ldots, k-1$, и получим

$$|z_2| = \left| \int_{t_1}^{t_2} e^{(t_2-r)C} v(r)dr \right| \le d\sqrt{t_2 - t_1} \cdot \sigma_2 = d\sqrt{d\,|z_1|} \cdot \sigma_2 =$$

$$= d^{\frac{3}{2}} |z_1|^{\frac{1}{2}} \sigma_2 \le d^{\frac{3}{2}} d^{\frac{3}{4}} |z_0|^{\frac{1}{4}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \sigma_2 \le d^3 K\theta^2,$$

$$|z_3| \le d^3 K\theta^2,$$

. . . . . .

$$|z_{k-1}| \le d^3 K\theta^2.$$

Из (8) вытекает

$$t_k \le d\,|z_0| + d^4 K\theta(k-1) \le d\,|z_0| + d^4 K\theta^2 (N-1) = T(z_0).$$

Значит, в игре (1) завершается преследование из начального положения z_0 за время $T(z_0)$. Теорема доказана.

Пример. Пусть дифференциальная игра описывается уравнением

$$\dot{z} = -u + v, \qquad (9)$$

где $z \in R^n$, $|u| \le 1$, $\| v(\cdot) | \le \sigma$. $M = \{z : |\pi z| < l\}$.

Ясно, что $\| e^{tC} \| = \| E \| = 1 = d$. Значит, выполнено условие теоремы 1. и в игре (9) возможно завершение преследования из произвольной точки $z_0 \notin M$ за время

$$T(z_0) = |z_0| + K\theta^2 (N-1),$$

где $K = \max(|z_0|, 1)$, $\theta = \max(\sigma, 1)$, $N = \left[\dfrac{|z_0| + \sigma^2}{l} \right]$.

Будем обозначать через S единичный замкнутый шар в R^n с центром в начале координат.

Теорема 2. Пусть существуют положительные константы m, d и функция $T(z), z \in R^n \setminus M$, такие, что

а) $T = T(z) \le m\,|\pi z|$, $\pi e^{TC} z \in \int_0^T \pi e^{rC} S dr$;

б) $\| \pi e^{tC} \| \le d$ для всех $t \ge 0$.

Тогда в игре (2) возможно завершение преследования из произвольной начальной точки $z_0 \in R^n \setminus M$ за время

$$T_2(z_0) = m\,|\pi z_0| + (N-1) d^2 m^2 K\theta^2,$$

где $N = \left[\dfrac{d^2 m(|\pi z_0| + \sigma^2)}{l} \right]$, $K = \max(|\pi z_0|, 1)$, $\theta = \max(\sigma, 1)$.

Доказательство. Пусть, $v(t)$, $t \ge 0$, – произвольная измеримая функция, $\| v(\cdot) | \le \sigma$. Из условия а) имеем

$$\pi e^{t_1 C} z_0 \in \int_0^{t_1} \pi e^{rC} S dr,$$

где $t_1 = T(z_0) \le m\,|\pi z_0|$. В силу леммы Филиппова [65] существует измеримое управление $u_1(t)$, $0 \le t \le t_1$,

$|u(t)|\le 1$, такое, что

$$\pi e^{t_1 C} z_0 = \int_0^{t_1} \pi e^{rC} u_1(r)dr = \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1-s)C} u_1(t_1-s)dr. \qquad (10)$$

На сегменте $[0, t_1]$ положим $u(t) = u_1(t_1 - t)$. Тогда решение уравнения (2) имеет вид

$$z(t) = e^{tC} z_0 - \int_0^t e^{(t-r)C} u_1(t_1 - r)dr + \int_0^t e^{(t-r)C} v(r)dr.$$

Поэтому

$$\pi z(t) = \pi e^{tC} z_0 - \int_0^t \pi e^{(t-r)C} u_1(t_1 - r)dr + \int_0^t \pi e^{(t-r)C} v(r)dr.$$

Учитывая (10), получим

$$\pi z_1 = \pi z(t_1) = \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1-r)C} v(r)dr.$$

Предположим $z_1 = z(t_1) \notin M$. Тогда

$$l < |\pi z_1| = \left| \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1-r)C} v(r)dr \right| \le d\sqrt{t_1} \sqrt{\int_0^{t_1} v^2(r)dr} \le dm^{\frac{1}{2}} |\pi z_0|^{\frac{1}{2}} \sigma_1, \qquad (11.1)$$

где $\sigma_1 = \sqrt{\int_0^{t_1} v^2(r)dr}$. Из условий теоремы имеем

$$\pi e^{(t_2-t_1)C} z_1 \in \int_0^{t_2-t_1} \pi e^{rC} S dr,$$

где $t_2 - t_1 = T(z_1) \le m|\pi z_1|$. Значит, существует измеримое управление $u_2(r)$, $0 \le r \le t_2 - t_1$, такое, что

$$\pi e^{(t_2-t_1)C} z_1 = \int_0^{t_2-t_1} \pi e^{rC} u_2(r)dr = \int_{t_1}^{t_2} \pi e^{(t_2-r)C} u_2(t_2 - r)dr. \qquad (12)$$

Повторив предыдущие рассуждения, получим

$$l < |\pi z_2| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \pi e^{(t_2-r)C} v(r)dr \right| \le d\sqrt{t_2 - t_1} \cdot \sqrt{\int_0^{t_1} v^2(r)dr} \le dm^{\frac{1}{2}} |\pi z_1|^{\frac{1}{2}} \sigma_2,$$

где $\sigma_2 = \sqrt{\int_{t_1}^{t_2} v^2(r)dr}$. Следовательно, имеем

$$l < dm^{\frac{1}{2}} dm^{\frac{1}{2}} |\pi z_0|^{\frac{1}{4}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \sigma_2 = d^2 m |\pi z_0|^{\frac{1}{4}} \sigma_1^{\frac{1}{2}} \sigma_2. \qquad (11.2)$$

С помощью элементарных вычислений можно показать, что для некоторого $k, 1 \le k \le N$, имеет место соотношение $z(t_k) \in M$, где

$$t_k = t_{k-1} + T(z_{k-1}) = T(z_0) + T(z_1) + \ldots + T(z_{k-1}) \le$$

$$\le m\left(|\pi z_0| + |\pi z_1| + \ldots + |\pi z_{k-1}|\right). \qquad (13)$$

Теперь покажем, что

$$t_k \le T(z_0) = m|\pi z_0| + (N-1)d^2 m^2 K\theta^2.$$

Из (11.1) имеем

$$|\pi z_1| \le d^2 mK\theta^2. \qquad (14)$$

Следовательно, для всех , получим

$$i, 1 \le i \le k-1.$$

В силу (13), имеем

$$t_k \le m|\pi z_0| + (k-1)d^2 m^2 K\theta^2 \le m|\pi z_0| + (N-1)d^2 m^2 K\theta^2 = T(z_0).$$

Теорема доказана.

Пример. Пусть уравнение (1) имеет вид

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} z - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

где $z \in R^3$, $|u| \le 1$, $|v(\cdot)| \le \sigma$. $M = \{z : |\pi z| \le l\}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Нетрудно вычислить, что

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}, \ \pi e^{tC} = \pi.$$

Покажем, что для этого примера выполнены условия теорема 2. Положим $T = T(z) = |\pi z|$. Пусть $z_0 \in R^n \setminus M$ – начальное положение в игре (15). Выберем $\psi = \frac{\pi z_0}{|\pi z_0|}$. Тогда

$$\int_0^T \pi e^{rC} \psi dr = \frac{\pi z_0}{|\pi z_0|} \cdot T = \pi z_0.$$

Значит, условие а) выполнено. Ясно, что условие б) тоже выполнено, так как $\pi e^{tC} = \pi$ – постоянная. Отметим, что для этой игры не выполняются условия теоремы 1.

Литература:

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. – М.: Наука, 1988.

2. Красовский Н.Н. Об одной задаче преследования. // Прикладная математика и механика. – 1962, т. 26, №2 – С. 218-232.

3. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами. // Кибернетика, 1976. – №3 – С.145-146.

4. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. – Л.: ЛГУ, 1971.

5. Сатимов Н.Ю. К задаче преследования в линейных дифференциальных играх. // Кибернетика, 1973 – №3 – С. 88-93.

6. Сатимов Н.Ю., Карабаев Э.О. Об одном методе решения задачи преследования. //Доклады. АН УзССР, 1986 – №3. – С. 7-9.

Андижон давлат университети
2014 йил 15 мартда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.-м.ф.д. Ғ.Мўминов)