МАТЕМАТИК МАЯТНИКНИНГ СИНУСОИДАЛ НОЧИЗИҚЛИ ТЕБРАНИШЛАРИ

З.МЕХМОНОВА, З.САЛОҲИДДИНОВА, М.НОСИРОВ

Мақолада математик маятникнинг синусоидал нозиқли тебранишлари кўриб чиқилди ва у энергиянинг қийматига қараб тебранма ҳаракат, сепаратриса бўйича ҳаракат ва ротацион ҳаракат турларига бўлиниши кўрсатилди.

Калит сўзлар: *нозиқли тебранишлар, эллиптик интеграл, тебранма ҳаракат, сепаратриса, ротацион ҳаракат.*

В статье рассмотрено синусоидальное нелинейное колебание математического маятника и доказано, что в зависимости от энергии данное движение может быть колебательным, по сепаратрисе и ротационным.

Ключевые слова: *нелинейные колебания, эллиптический интеграл, колебательное движение, сепаратриса, ротационное движение.*

The article discusses sinusoidal nonlinear oscillations of a simple pendulum and the authors proved that the energy dependence of this movement can beat the vibrational, rotational, and on the separatritional levels.

Key words: *nonlinear oscillations, elliptic integral, oscillating movement*

Маълумки, тебранма ҳаракат табиатда энг кўп учрайдиган ҳаракат турларидан бўлиб, унга соат маятниги, пружинанинг тебранишлари, дарахт баргларининг шамолда тебраниши, автомобиль двигателининг тебраниши, электромагнит тебранишлар, лазерлар каби жуда кўплаб ҳодисаларни мисол келтириш мумкин. Лазер йўналганлиги юқори даражада бўлган монохроматик когерент ёруғлик манбаи бўлиб, мажбурий нурланиш туфайли ёруғликнинг кучайиши маъносини англатади.

Тебранма ҳаракатларни ўрганиш математик маятникнинг тебранишини ўрганишдан бошланади.

Математик маятникнинг кичик тебранишлари (ω=1)

$$x'' + x = 0 \qquad (1)$$

тенгламага бўйсуниб, тебраниш даври

$$T=2\varpi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2)$$

формула орқали аниқланади. Лекин, тебраниш амплитудаси ортган сари унинг ҳаракати

$$x'' + sinx = 0 \qquad (3)$$

тенгламага бўйсуниб, тебраниш даври ҳам ўзгариб боради. Синусоидал ночизиқликка эга бўлган бу тенгламага нафақат математик маятник, балки физик маятник, ўта ўтказувчанлик контакти, лазерларнинг ночизиқли муҳитда тарқалиши, Кирхгоф аналогияси ва бошқа жуда кўп ҳодисалар бўйсунади. Шунинг учун бу тенгламани батафсил кўриб чиқамиз.

Маятникнинг потенциал энергияси

$$W(x)=-cosx \qquad (4)$$

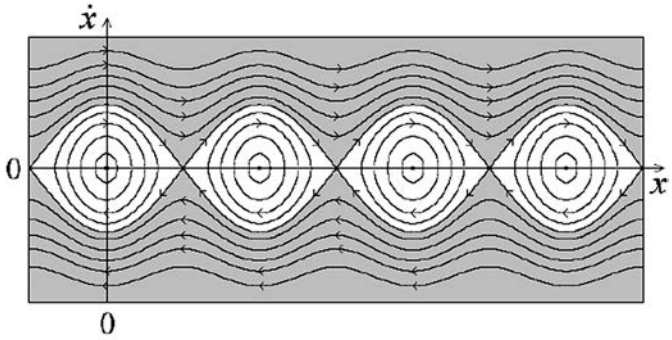
ифода орқали аниқланиб, унинг минимумлари $x=2\varpi n$ нуқталарда, тугунлари эса $x=2\varpi n+\varpi$ нуқталарда бўлади (1-расм).

Маятник ҳаракатининг фазовий траекториясини учта типга ажратиш мумкин:

1) потенциал ўра ичидаги тебранма ҳаракат;

2) тугундан тугунга борувчи сепаратриса бўйича ҳаракат;

3) ротацион ҳаракат.



1-расм

Энергиянинг сақланиш қонунини ёзамиз

$$x2/2\text{-}cosx=E \qquad (5)$$

Бу ерда E- тўла энергия бўлиб, -1<E<1 бўлганда тебранма ҳаракат, E=1 бўлганда сепаратриса бўйича ҳаракат, E>1 бўлганда ротацион ҳаракат юз беради. Ҳар бир ҳаракатни алоҳида кўриб чиқамиз.

Тебранма ҳаракат.

Маятник қуйидаги бошланғич шартларни қаноатлантирсин:

$$x(0)=x0,\ x(0)=0 \qquad (6)$$

У ҳолда $E=\text{-}cosx_0$. (5) тенгламадан

$$x'=\pm\sqrt{\sin^2(x_0/2)-\sin^2(x/2)} \qquad (7)$$

ни ҳосил қиламиз, бу ерда “+” ишораси фазовий траекториянинг юқори қисмини, “-” ишораси эса қуйи қисмини билдиради.

$$m=\sin^2(x_0/2) \qquad (8)$$

белгилаш киритамиз. У ҳолда $E=2m^2\text{-}1$. (4) тенгламада ўзгарувчиларни ажратиб,

$$dt=\frac{dx}{2\sqrt{m^2-\sin^2(x/2)}} \qquad (9)$$

ни ҳосил қиламиз. $sinx=m$ белгилаш киритамиз. У ҳолда

$$dx=\frac{md\tau}{\sqrt{1-m^2\tau^2}} \qquad (10)$$

ва (7) тенглама

$$dt=\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-m^2\tau^2)}}=F(z,m) \qquad (11)$$

кўринишни олади. Бу тенгламани бутун фазовий траектория бўйича интеграллаб, тебраниш даври учун

$$T = 4\int_0^{\pi,2} \frac{d\Psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\Psi}} = 4K(m) \qquad (12)$$

ифодани оламиз, бу ерда K(m) – 1-тур эллиптик интеграли, $m^2=\frac{E+1}{2}$.

Шундай қилиб, тебраниш даври энергияга боғлиқ бўлиб, ҳаракат ноизохрон эканини билдиради. Эллиптик функцияларнинг хоссаларига асосан, (8) тенгламанинг ечими

$$\varphi = am\ (t,m) \qquad (13)$$

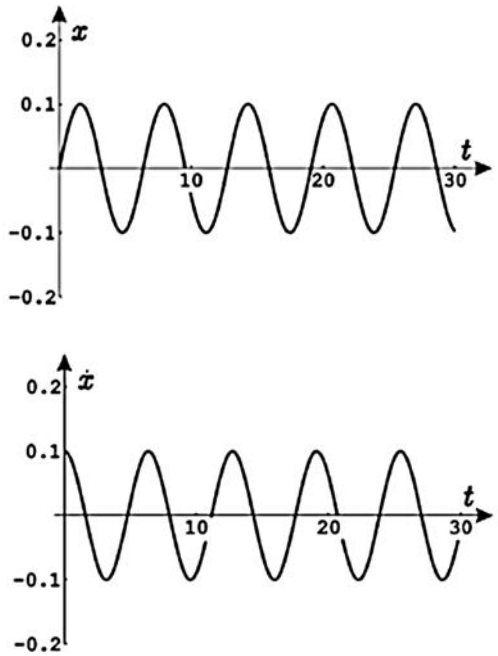
$$z=sin\varphi=sn(t,m) \qquad (14)$$

бу ерда am(t,m)- эллиптик функцияга тескари функция бўлиб, Якоби амплитудаси, sn(t,m)- эллиптик синус дейилади. z=sin(x/2)/m бўлганлиги учун

$$x = \pm 2arcsin\ [msn\ (t,m)] \qquad (15)$$

$$x' = \pm 2mcn\ (t,m) \qquad (16)$$

cn(t,m)- эллиптик косинус. 2–расмда координата ва тезликнинг (x, x') вақтга боғлиқлик графиклари келтирилган. Графиклардан кўриниб турибдики, E=-1 бўлганда ҳаракат чизиқли ва гармоник, қолган ҳолларда эса ангармоник ва ноизохрон бўлар экан.



2-расм

Сепаратриса бўйича ҳаракат.
Бундай ҳаракатда (8) интеграл

$$\frac{x^2}{2} = 1 + cosx = 2cos2\ (x/2) \qquad (17)$$

кўринишни олади. Бу тенгламада ўзгарувчиларни ажратсак,

$$\frac{dx}{2\cos^2(x/2)} = \pm dt \qquad (18)$$

кўринишга келади. Ҳосил бўлган тенгламани интегралаб

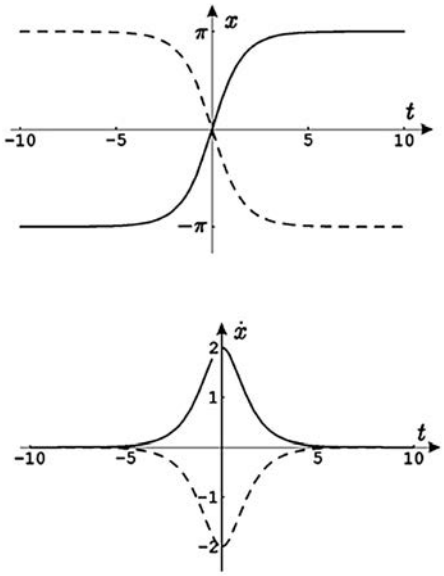
$$ln|tg\ \frac{\pi + x}{4}| = \pm(t\text{-}t0) \qquad (19)$$

ифодани оламиз, бу ерда t_0- интегралаш домийси. Охирги ифодадан x ва x'ларни аниқлаймиз:

$$x = arctg\ (exp[\pm(t\text{-}t0)])\text{-}\varpi \qquad (20)$$

$$x' = \pm 2/ch(t\text{-}t0) \qquad (21)$$

Бу катталикларнинг вақтга боғлиқлиги 3-расмда келтирилган.



3-расм

Ротацион ҳаракат.

Ротацион ҳаракатда координата даврий бўлмайди, лекин тезлик даврий бўлади. Бундай ҳаракатда E>1 бўлганлиги учун (11) интеграл

$$dt = \frac{dx}{2m\sqrt{1 - m^{-2}\sin^2(x/2)}} \qquad (22)$$

кўринишни олади. □ = $x/2$ белгилаш киритамиз ва бир қатор ўзгартиришлардан сўнг

$$t = F(\square,1/m)/m \qquad (23)$$

$$\square = am(mt,1/m) \qquad (24)$$

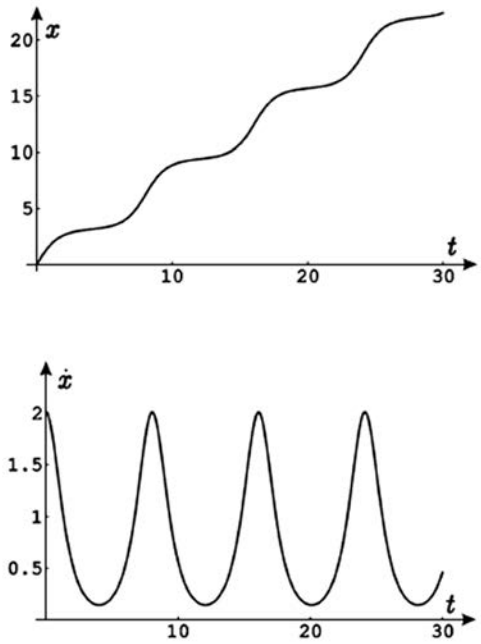
$$x'=2mdn(mt,1/m) \qquad (25)$$

ечимларга эга бўламиз. Тебраниш даври

$$T = 4K(1/m)/m \qquad (26)$$

ифода орқали аниқланади. У m=1 бўлганда чексиз бўлиб, $m > \to \infty$ бўлганда нолга интилади. Ротацион ҳаракат учун координата ва тезликнинг вақтга боғлиқлиги 4-расмда келтирилган.

Графиклардан кўриниб турибдики, ротацион ҳаракатда координата вақт ўтиши билан ортиб боради (даврий бўлмайди), тезлик эса даврий бўлади.



4-расм

Шундай қилиб, табиатдаги жуда кўп ҳодисаларни тавсифлайдиган математик маятникнинг синусоидал нозиқли тебранишлари энергиянинг қийматига қараб тебранма ҳаракат, сепаратриса бўйича ҳаракат ва ротацион ҳаракат турларига бўлинар экан.

Адабиётлар:

1. Мириноятов М. М. Лазерлар физикаси ва техникаси. – Т., 2009.
2. Карлов Н. В. Лекции по квантовой электронике. – М.: Наука, 1988.
3. Звельто О. Принципы лазеров. – М.: Мир, 1990.
4. Крылов К.И. и др. Основы лазерной техники. – Л.: Машиностроение, 1990.
5. Турсунов А. Т., Тўхлибоев О. Квант электроникасига кириш. – Т.: Ўқитувчи, 1992.

Андижон давлат университети
2014 йил 10 мартда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. И.Н.Каримов)