АРАЛАШ ТИПДАГИ ЭЛЛИПТИК-ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА ЕЧИМИНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ

С.Х.АКБАРОВА, Г.ДОЛИМОВА

Мақолада турли тартибли бузилиш чизиғига эга аралаш типдаги эллиптик-параболик тенглама учун чекли соҳада локал чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Калит сўзлар: *бузилиш чизиғи, аралаш типдаги тенглама, чегаравий масала, регуляр ечим.*

В данной статье доказывается существование и единственность решения локальной краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-параболического типа с различными порядками вырождения.

Ключевые слова: *линия вырождения, уравнения смешанного типа, краевая задача, регулярное решение.*

In this article the author tries to prove the solution uniqueness and existence of the local boundary value problems for elliptical-parabolic equation of mixed type with different orders of degeneracy.

Key words: *lines of degeneracy, equation of mixed type, boundary value problem, regular solution.*

$D \subset R^2$ - соҳа $x > 0,\ y > 0$ да $y = 0,\ x = h_1,\ y = h_2$ тўғри чизиқларнинг $OA,\ AB,\ BB0$ кесмалари ва $x < 0,\ y > 0$ да охирлари $A_0(-h,0),\ B_0(0,h_2)$ нуқталарда бўлган

$$\sigma : \frac{1}{q_2^2}(-x)^{2q_2} + \frac{1}{p_2^2}y^{2p_2} = 1$$

силлиқ чизиқ ва $y = 0$ тўғри чизиқнинг A_0O кесмаси билан чегараланган бўлсин, бу ерда $h_1 = (2q_1)^{1/q_1}$, $h_2 = p_2^{1/p_2}$, $h = q_2^{1/q_2}$, $2q_1 = n_1 + 2,\ 2q_2 = n_2 + 2,\ 2p_2 = m_2 + 2$ бўлиб, $0 < m_1 < m_2 + 1,\ n_i = const (i = 1,2)$

Қуйидаги

$$0 = \begin{cases} y^{m_1}u_x - x^{n_1}u_y, x > 0, \\ y^{m_2}u_x + (-x)^{n_2}u_y, x < 0, \end{cases} \qquad (1)$$

тенгламани D соҳада қараймиз.

(1) тенглама $x > 0,\ y > 0$ да параболик типга тегишли, $x < 0,\ y > 0$ да эса эллиптик типга тегишли.

Белгилаш киритамиз:

$$D_1 = \{(x,y) : 0 < x < h_1, 0 < y < h_2\},\ D_2 = \{(x,y) : -h < x < 0, 0 < y < h_2\}.$$

Таъриф. D соҳада (1) тенгламанинг регуляр ёки классик ечими деб D_1 ва D_2 соҳаларнинг барча нуқталарида бу тенгламани қаноатлантирувчи

$u(x,y) \in C^{2,1}(D_1) \cap C^2(D_2)$ функцияни атаймиз.

Трикоми масаласи. Ушбу шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функцияни аниқланг:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$;

2) $u(x,y)$ – (1) тенгламанинг D_1 ва D_2 соҳалардаги регуляр ечими;

3) $u(x,y)$ – қуйидаги шартларни қаноатлантиради

$$u(x,y)\big|_\sigma = \psi(x,y),\ (x,y) \in \sigma, \qquad (2)$$

$$u_y\big|_{y=0} = \nu_0(x),\ -h < x < 0, \qquad (3)$$

$$u\big|_{y=0} = \varphi_1(x),\ \ 0 \le x \le h_1, \tag{4}$$

$$u\big|_{y=h} = \varphi_2(y),\ 0 < y < h_2, \tag{5}$$

бу ерда берилган $\psi(x,y),\ \nu_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(y)$ – функциялар бўлиб,

$$\nu_0(x) \in C^1(-h < x < 0), \tag{6}$$

$$\varphi_1(x) \in C(0 \le x \le h_1) \cap C^2(0 < x < h_1), \tag{7}$$

$$\varphi_2(y) \in C(0 \le y \le h_2) \cap C^1(0 < y < h_2), \tag{8}$$

$\psi(x,y)$ функция эса $\psi(x,y) = xy\overline{\psi}(x,y),\ \overline{\psi}(x,y) \in C(\overline{\sigma})$ кўринишга эга.

Экстремум принципи. Трикоми масаласининг ечими ёпиқ $\overline{D}$ соҳада ўзининг мусбат максимумига ва манфий минимумига $\overline{\sigma} \cup \overline{A_0O} \cup \overline{OA} \cup \overline{AB}$ да эришиши мумкин.

Экстремум принципи ёрдамида (1) тенглама учун Трикоми масаласи ечимининг ягоналиги ҳақидаги қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

Теорема. Агар (6), (7), (8) шартлар бажарилса, у ҳолда (1) тенглама учун қўйилган (2), (3), (4),(5) шартли масала ечими мавжуд ва ягона.

Исбот. Ечимнинг ягоналиги. Фараз қиламиз, $u(x,y)$ – бир жинсли Трикоми масаласининг ечими бўлсин. Экстремум принципига кўра, бу функция ўзининг мусбат максимумига ва манфий минимумига $\overline{\sigma} \cup \overline{A_0O} \cup \overline{OA} \cup \overline{AB}$ да эришади. Бу ерда эса $u(x,y)$ функциянинг қиймати нолга тенг, демак, $\overline{D}$ да $u(x,y) \equiv 0$. Шундай қилиб, Трикоми масаласи ягона ечимга эга.

Ечимнинг мавжудлиги. D_1 соҳада (1) тенгламанинг (4), (5) ва

$$u\big|_{x=0} = \tau(y), 0 \le y \le h_2 \tag{9}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини аниқлаб, ундан қуйидаги муносабатни ҳосил қилиш мумкин:

$$\nu(y) = y^{-m_1} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y z(y-t)\tau(t)t^{m_1}dt + f(y), \tag{10}$$

бу ерда

$$\nu(y) = u_x(0,y), 0 < y < h_2, \tag{11}$$

$z(y-t),\ f(y)$ – берилган функциялар.

D_2 соҳада эса (1) тенгламанинг (2), (3) ва (11) шартли масаласини ечиб, қуйидагини оламиз:

$$\tilde{\tau}(y) = \gamma_1 y^{\alpha-\beta} \left\{ F_{0y}\left[\begin{matrix}\beta-\alpha, \dfrac{1-2\alpha}{2} \\ 1-2\alpha, y\end{matrix}\right] y^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}(y) + F_{y1}\left[\begin{matrix}\beta-\alpha, \dfrac{1-2\alpha}{2} \\ 1-2\alpha, y\end{matrix}\right] y^{\frac{2\beta-1}{2}} + \right.$$

$$+\gamma_2 y^{-\alpha-\beta} \int_0^1 t^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}(t) F\left(\alpha+\beta, \frac{1+2\alpha}{2}, 1+2\alpha, \frac{y-t}{y}\right) dt -$$

$$-\frac{\gamma_1}{\Gamma(1-2\alpha)} \int_0^1 t^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}(t)(1-yt)^{-2\alpha} F\left(\beta-\alpha, \frac{1-2\alpha}{2}, 1-2\alpha, 1-yt\right) dt -$$

$$\left. -\gamma_2 \int_0^1 t^{\frac{2\beta-1}{2}} \tilde{\nu}(t) F\left(\alpha+\beta, \frac{1+2\alpha}{2}, 1+2\alpha, 1-yt\right) dt + \quad (y), 0 \square y \square 1, \right. \tag{12}$$

бу ерда $g(y)$ - берилган функция, $\tilde{\tau}(y) = \tau\left[\left(p^2 y\right)^{1/2p}\right]$, $\tilde{\nu}(y) = \nu\left[\left(p^2 y\right)^{1/2p}\right]$,

$$\gamma_1 = \frac{2^{2\alpha-3}}{\pi}\left(\frac{2}{q}\right)^{2\alpha}\frac{\Gamma(1-2\alpha)\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}, \quad \gamma_2 = \frac{2^{-2\alpha-3}}{\pi}\left(\frac{2}{q}\right)^{2\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}$$

бўлиб, $F(a,b,c,y)$ – Гаусс гипергеометрик функцияси [1],

$$F_{0y}\begin{bmatrix}a,b\\c,y\end{bmatrix} f(y) = \frac{1}{\Gamma(c)}\int_0^y f(t)(y-t)^{c-1}F\left(a,b,c;\frac{y-t}{y}\right)dt, \quad c>0,$$

$$F_{y1}\begin{bmatrix}a,b\\c,y\end{bmatrix} f(y) = \frac{1}{\Gamma(c)}\int_y^1 f(t)(t-y)^{c-1}F\left(a,b,c;\frac{t-y}{y}\right)dt, \quad c>0$$

- f(y) функцияга боғлиқ умумлашган с каср тартибли интегралар [2].

(10) ва (11) муносабатларга асосан, $\tilde{\nu}(y)$ номаълум функцияга нисбатан Фредгольм 2-тур интеграл тенгламасини оламиз [3], [4]. Интеграл тенгламанинг ядролари ва ўнг томонини тадқиқ этиб, бу тенгламанинг ягона ечимга эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Адабиётлар:

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука,1985.
2. Салахитдинов М.С., Хасанов А. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения. // Дифференциальные уравнения. – Минск: Наука и техника, 1983. – Т.19. – №1. – С.110-118.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.
4. Salohiddinov M. Integral tenglamalar. – T.: Yangiyul poligraph servise, 2007.

Андижон давлат университети
2014 йил 5 апрелда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)