К УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ НА ОСНОВЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Каримжанов, М.А.Кадирова

Мазкур ишда ўрталаштириш ҳамда Ляпунов функциялари методлари ғояларини бирлаштирилган ҳолда лимит тенгламалар асосида айрим ўзгарувчилар бўйича ҳаракат турғунлиги тадқиқ қилинган.

This article deals with the persistency on the part of alterations which combines the ideas of methods of function of Lyapunov and middling.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянно действующими малыми возмущениями [2,3,4,6] возникают в теории нелинейных колебаний [1] , небесной механике[8] и других областях естествознания.

Второй метод Ляпунова, следуя идеям Г.Н.Дубошина [4] и И.Г.Малкина [6], использования функции Ляпунова для некоторой укороченной системы является эффективным при исследовании устойчивости движения такого рода систем при новых предположениях об их динамических свойствах.

В настоящей работе приводятся результаты по устойчивости относительно части переменных, полученные объединением идей метода усреднения и метода функций Ляпунова на основе предельных уравнений.

Отправными для этих исследований были идеи В.В.Румянцева, А.С.Озиранера [10], А.А.Мартынюка [7] и др. по устойчивости относительно части переменных систем

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}(t,\mathbf{z}) + \mu\mathbf{R}(t,\mathbf{z}), \qquad (1)$$

где, $\mathbf{z}\in R^n, t\in J=[0,\infty), 0<\mu<<1$ - малый параметр.

Мы будем исследовать свойства возмущенного движения систем вида (1) близких к определениям устойчивости по части переменных состояния равновесия **x**=0 системы

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}(t,\mathbf{x},\mathbf{y}), \qquad \mathbf{Z}(\mathrm{t},\mathbf{0},\mathbf{y})=\mathbf{0}, \qquad (2)$$

где z=(**x**,**y**), $x\in R^m, y\in R^{n-m}$, при малых постоянно действующих возмущениях.

Для этой цели используется функция Ляпунова, соответствующая укороченной системе (2) и предполагается, что известно общее решение предельной системы

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}^0(t,\mathbf{x},\mathbf{y}), \qquad (3)$$

способ построения которой указывается ниже.

О системах (1)-(3) сделаем следующие предположения:

A_1. Вектор-функции **Z**(t,**x**,**y**), **R**(t,**x**,**y**) определены в области $\mathrm{D}_1=\mathrm{J}\times\Omega_1\times Y, \Omega_1=\{\mathbf{x}\in R^m : \|\mathbf{x}\|<H\}, Y=\{\mathbf{y}\in R^{n-m} : \|\mathbf{y}\|<\infty\}$, удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи Коши для системы (1).

а) **Z**(t,**z**) и $\mathbf{Z}^0(t,\mathbf{z})$ удовлетворяют условиям Липшица по **z**=(**x**,**y**) соответственно с постоянными L_1, L_2 и $\mathbf{Z}^0(\mathrm{t},\mathbf{0},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ при всех $t\in J, \mathbf{y}\in Y$;

б) для вектор-функции $\mathbf{R}(t,\mathbf{z})$ существуют суммируемые функции M (t),F(t) и $\chi_1(r)\in K$ - классу Хана [13], постоянные M_0, F_0 такие, что на любом конечном отрезке времени $[t_1;t_2]\subset J$

$$\|\mathbf{R}(t,\mathbf{z})\| \le M(t), \int_{t_1}^{t_2} M(t)dt \le M_0(t_2-t_1), \qquad (4)$$

$$|\psi(t,\mathbf{z}',\mu)-\psi(t,\mathbf{z}'',\mu)| \le F(t)\chi_1(\|\mathbf{z}'-\mathbf{z}''\|), \int_{t_1}^{t_2} F(t)dt \le F_0(t_2-t_1),$$

Если интеграл $\varphi^0(T,t_0\mathbf{z}_0)=\int_{t_0}^{t_0+T}\varphi(t,\mathbf{z}^0(t,t_0,\mathbf{z}_0))dt$, где $\varphi(t,\mathbf{z})=((\nabla V)^T;\mathbf{R}(t,\mathbf{z}))$,

V=V(t,**z**)- функция Ляпунова, обеспечивающая асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $\mathbf{z}=0$ укороченной системы (2), не удовлетворяет условию 3б) ранее известной теоремы [5], имеет смысл пользоваться возмущенной функцией Ляпунова [12]:

$$V(t,\mathbf{z},\mu)=V_0(t,\mathbf{z})+u(t,\mathbf{z},\mu) \qquad (5)$$

$V_0(t,\mathbf{z})$ – функция Ляпунова для укороченной системы (2), а функция $u(t,\mathbf{z},\mu)\in C^{(1,1)}(J\times D)$, определенная на $J\times D\times M$, где $M=(0;\mu^*)$. Предполагается, что возмущение $u(t,z,\mu)$ для малых μ, можно выбрать достаточно малым в окрестности $\mathbf{z}=\mathbf{0}$ и оно может быть таким, что функция $V(t,\mathbf{z},\mu)$ не будет знакопеременной.

Введем некоторые обозначения. Полная производная функции (4) в силу системы (1)

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V_0}{\partial t}+((\nabla V_0)^T;\mathbf{Z})+((\nabla V_0)^T;\mu\mathbf{R})+\frac{\partial u}{\partial t}+((\nabla \mathrm{u})^{\mathrm{T}};\mathbf{Z})+((\nabla \mathrm{u})^{\mathrm{T}};\mu\mathbf{R}) \qquad (6)$$

Предположим, что существует функция $\theta(\mu)\in K$ - классу Хана [13] такая, что $((\nabla V_0)^T;\mu\mathbf{R})+\frac{\partial u}{\partial t}+((\nabla \mathrm{u})^{\mathrm{T}};\mathbf{Z})+((\nabla \mathrm{u})^{\mathrm{T}};\mu\mathbf{R})=\theta(\mu)\,\psi(t,\mathbf{z},\mu)$. Тогда (5) примет вид

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV_0}{dt}+\theta(\mu)\,\psi(t,\mathbf{z},\mu), \qquad (7)$$

где $\frac{dV_0}{dt}=\frac{\partial V_0}{\partial t}+((\nabla V_0)^T;\mathbf{Z})$

Пусть $$\psi^0(T,t_0,\mathbf{z}_0,\mu)=\int_{t_0}^{t_0+T}\psi(t,\mathbf{z}^0(t,t_0,\mathbf{z}_0),\mu)dt, \qquad (8)$$

где интеграл вычисляется вдоль решения $\mathbf{z}^0(t)=\mathbf{z}^0(t,t_0,\mathbf{z}_0)$ предельной системы (3).

Имеет место следующее утверждение:

Лемма. Если выполняются условия A_1 а), б), то для решений $\mathbf{z}(\mathrm{t})=(\mathbf{x}(\mathrm{t},\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0),\mathbf{y}(\mathrm{t},\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0))$ при $(\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0)\in J\times\Omega_1$ системы (1) на любом конечном отрезке $[t_0,\tau_1]$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{x}(\mathrm{t},\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0)\|\le[\|x_0\|+\mu M_0\tau_1]\exp(L_1\tau_1). \qquad (9)$$

Доказательство. Из системы (1) имеем

$$\|\mathbf{x}(\mathrm{t},\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0)\|\le\|x_0\|+\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{Z}(\mathrm{s},\mathbf{z}(\mathrm{s})\|ds+\mu\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{R}(\mathrm{s},\mathbf{z}(\mathrm{s})\|ds.$$

Учитывая неравенство (4), соотношение $\mathbf{Z}(\mathrm{t},\mathbf{0},\mathbf{y})=\mathbf{0}$ и условие Липшица для $\mathbf{Z}(\mathrm{t},\mathbf{x},\mathbf{y})$ по $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, находим $\|\mathbf{x}(\mathrm{t},\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0)\|\le\|x_0\|+\mu M_0(t-t_0)+L\int_{t_0}^{t}\|\mathbf{x}(\mathrm{s},\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0)\|\,\mathrm{ds}$.

Применяя к этому неравенству лемму Гронуолла-Беллмана, получаем требуемую оценку.

Задача об устойчивости решений системы (1) по отношению к переменным x рассматривается в следующем смысле:

Определение. Если для любого $\varepsilon\in(0;H)$ существуют числа $\eta(\varepsilon)>0,\mu_0(\varepsilon)>0$, независящие от t_0, такие, что для любого решения $\mathbf{z}(\mathrm{t})=(\mathbf{x}(\mathrm{t},\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0),\mathbf{y}(\mathrm{t},\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0))$ системы (1) с начальными условиями $t_0\in J,\|\mathbf{z}_0\|<\eta$ выполняется неравенство $\|\mathbf{x}(\mathrm{t},\mathrm{t}_0,\mathbf{z}_0)\|<\varepsilon$ при всех $\mathrm{t}>\mathrm{t}_0$ и $\mu<\mu_0$, то будем говорить, что оно μ – устойчиво относительно части переменных .

Замечание 1. Вышеопределенное свойство близко к устойчивости по части переменных **x** [8,9,11] невозмущенного движения **z=0** системы (2) при малых постоянно действующих возмущениях [4,6,8].

В данной работе задача об устойчивости решений системы (1) по отношению к переменным **x** решается с учетом результатов монографии [12].

Теорема. Пусть в области D_1 выполняются условия:

1) существует функция $V_0(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) \in C^{(1,1,1)}(D_1)$ и функции a и b $\in K$ – классу такие, что

$$a(\|\mathbf{x}\|) \le V_0(t,\mathbf{x},\mathbf{y}) \le b(\|\mathbf{x}\|)$$

$$\frac{dV_0}{dt} \le 0$$

2) имеет место условия A_1, и для любого числа $\rho \in (0;H)$ равномерно по $\mathbf{z} \in B_\rho$ выполняется предельное соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}\|\mathbf{Z}(t,\mathbf{z}) - \mathbf{Z}^{\mathbf{0}}(t,\mathbf{z})\| = 0$;

3) существует функция $\chi_2(r) \in K$ - классу такая, что при $(t,\mathbf{z}) \in D_1$ и $\mu \in (0;\mu^*)$ имеет место оценка $|u(t,\mathbf{z},\mu)| \le \chi_2(\mu)$;

4) для любых чисел $\alpha,\beta(0<\alpha<\beta<H)$ существуют положительные числа μ ,δ и l такие, что для каждого значения $(t',\mathbf{z}')(t' \in J, \alpha \le \|x'\| \le \beta, y' \in Y)$ выполняется одно из условий

а) $\frac{dV_0}{dt} + \theta_1(\mu)\,\psi(t',\mathbf{z}',\mu) \le 0$ при $\mu < \mu'$;

б) $\psi^0(T,t',\mathbf{z}',\mu) \le -\delta T$ при T>l.

Тогда любое решение системы (1) μ-устойчиво по переменным x.

Замечание 2. В приведенной теореме возмущенная функция Ляпунова (5) и ее производная в силу системы (1) может быть знакопеременной в отличие от теоремы В.В.Румянцева[10] об устойчивости по части переменных.

Если $X(t,x) \equiv X^0(t,x)$, тогда из теоремы1. следует теорема 1 из монографии [12].

Литература:

1. Боголюбов Н.Н.,Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974
2. Гермаидзе В.Е., КрасовскийН.Н. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. Математика и механика.- 1957. -21, №6. – С.769-774.
3. Горшин С.И. Об устойчивости движения с постоянно действующими возмущениями // Изв. АН Каз.сср. Сер.математики и механики. -1948. -№56. – С.46-73.
4.Дубошин Г.Н. К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущениях // Тр. ГАИШ при Моск.ун-те. 1940. – 14.- С.153-164.
5. Каримжанов А., Косолапов В.И. К устойчивости систем с малым параметром // Новосибирск: Наука, 1985
6. Малкин И.Г. Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика.- 1944. – 8, №3. – С.241-245.
7.Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А. Устойчивость движения: Метод предельных уравнений.- Киев: Наукова думка, 1990
8.Озиранер А.С. Об устойчивости движения относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях // Прикл. математика и механика.- 1981.- 45, №3.– С.419-427
9.Персидский К.П. К теории устойчивости решений дифференциальных уравнений // Изб.тр.: В 2 т., т.I.– Алма-Ата, 1976.- С.139-146.
10.Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных.– М.: Наука, 1987
11.Хапаев М.М. Об одной теореме типа Ляпунова // Докл. АН СССР.– 176, №6.– С.1262-1265.
12.Хапаев М.М. Усреднение в теории устойчивости.– М.: Наука, 1986.- 191 с.
13.Hahn W. Stability of motion.– Berlin: Springer-Verlag, 1967

Андижон давлат университети,
2009 йил 6 июльда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.-м.ф.д. В.Г.Миладжонов)