О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

С.Х.Акбарова, Г.Ахмедова

Мақолада турли тартибли ва иккита бузилиш чизиғига эга аралаш типдаги эллиптик-параболик тенглама учун нолокал чегаравий масала ўрганилган.

Калит сўзлар: *бузилиш чизиғи, бузилиш чизиғининг тартиби, аралаш типдаги тенглама, нолокал чегаравий масала, классик(регуляр) ечим.*

В статье описана нелокальная краевая задача для уравнения смешанного эллиптико-параболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения.

Ключевые слова: *линия вырождения, порядок линии вырождения, уравнения смешанного типа,- нелокальная краевая задача, классическое(регулярное) решение.*

The article discusses the problems of nonlocal boundary value for elliptical-parabolic equation of mixed type with two lines and different orders of degeneracy..

Key words: *lines of degeneracy, order of lines of degeneracy, equation of mixed type, nonlocal boundary value problem, classical (regulyar) solution.*

1.Постановка задачи. Рассмотрим уравнение

С.Х.Акбарова *– АДУ математика кафедраси доценти, физика-математика фанлари номзоди;*
Г.Аҳмедова *– АДУ математика мутахасслиги магистранти.*

$$0=\begin{cases} y^{m_1}u_x - x^{n_1}u_y, x>0, \\ y^{m_2}u_x + (-x)^{n_2}u_y, x<0, m_i, n_i = const (i=\overline{1,2}) \end{cases} \quad (1)$$

в области Ω, ограниченной отрезками AA_1, A_1B_1, B_1B_2 прямых $y=0$, $x=h_1$, $y=h$ при $x>0$, $y>0$ и гладкой кривой $\sigma: \frac{1}{q_2^2}(-x)^{2q_2} + \frac{1}{p_2^2}y^{2p_2} = 1$

с концами в точках $A_2(-h_2,0)$, $B_2(0,h)$ и отрезком A_2A_1 прямой $y=0$ при $x<0$, $y>0$.

Здесь $h_1 = (2q_1)^{1/q_1}$, $h_2 = q_2^{1/q_2}$, $h = p_2^{1/p_2}$, $2q_1 = n_1+2$, $2q_2 = n_2+2$, $2p_2 = m_2+2$

причем $0 < m_1 < m_2+1$, $n_1 > m_1 - 1$, $m_2 < n_2 < 2(n_1+1)$.

Уравнение (1) является уравнением смешанного эллиптико-параболического типа линии $x=0, y=0$ являются линиями вырождения этого уравнения.

Пусть

$$\Omega_1 = \{(x,y): 0<x<h_1, 0<y<h_2\},$$
$$\Omega_2 = \{(x,y): -h<x<0, 0<y<h_2\},$$
$$J_1 = \{(x,y): 0<x<h_1, y=0\},$$
$$J_2 = \{(x,y): -h_2<x<0, y=0\},$$
$$J_3 = \{(x,y): x=h_1, 0<y<h\},$$
$$J = \{(x,y): x=0, 0<y<h\},$$
$$\alpha_1 = \frac{n_1+1}{n_1+2},\ 2\alpha_2 = \frac{n_2}{n_2+2},\ 2\beta_2 = \frac{m_2}{m_2+2}.$$

О п р е д е л е н и е. Регулярным (или классическим) в области Ω, решением уравнения (1), назовем функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям

1) $u(x,y) \in C^{2,1}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$;
2) $u(x,y)$ удовлетворяет уравнение (1) в областях Ω_1 и Ω_2.

З а д а ч а ТВ. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$;
2) $u(x,y)$ является регулярным в области Ω решением уравнения (1);
3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\big|_\sigma = \psi_1(x,y),\ (x,y) \in \sigma, \quad (2)$$
$$u_y\big|_{y=0} = \psi_2(x),\ x \in J_2, \quad (3)$$
$$u\big|_{y=0} = \phi(x),\ x \in J_1, \quad (4)$$
$$\alpha(y)u(x_0,y) + \beta(y) = u(h_1,y), \quad (5)$$
$$0 \le x_0 \le h_1,\ \ 0 \le y \le h_2,$$

где $\psi_1(x,y)$, $\psi_2(x)$, $\phi(x)$, $\alpha(y), \beta(y)$ – заданные функции, причем

$$\psi_2(x) \in C^1(J_2), \quad (6)$$

$$\phi(x) \in C(\overline{J_1}) \cap C^2(J_1), \quad (7)$$

$$\alpha(y) \in C(0 \le y \le h), \quad (8)$$

$$\beta(y) \in C(0 \le y \le h) \cap C^1(0 < y < h), \quad (9)$$

$$\alpha(0)u(x_0,0) + \beta(0) = \phi(h_1), \quad (10)$$

а функция $\psi_1(x,y)$ имеет вид

$$\psi_1(x,y) = xy\overline{\psi_1}(x,y),\ \overline{\psi}_1(x,y) \in C(\overline{\sigma}). \quad (11)$$

Заметим, что для уравнения (1) в неограниченной области исследованы краевые задачи в работах[1-2].

2.Единственность решения. Имеет место следующая

Т е о р е м а. Пусть $|\alpha(y)| \le 1, y \in \overline{J}$, то задача ТВ имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим обратное. Пусть существуют два решения задачи ТВ: $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$.

Ясно, что функция $u(x,y) \equiv u_1(x,y) - u_2(x,y)$ является решением однородной задачи. В силу принципа экстремума для параболических и эллиптических уравнений[3-4], функция $u(x,y)$ может достигать своего положительного максимума и отрицательного минимума на $\overline{\sigma} \cup J_2 \cup \overline{J_1} \cup \overline{J_3}$.

Пусть

$$M = \max_{(x,y)\in\Omega} |u(x,y)| \quad (12)$$

Допустим, что в некоторой точке $(h_1, y_0) \in \overline{J_3}$ справедливо равенство (12). Тогда на основе условия (5) имеем

$$|u(h_1, y_0)| = |\alpha(y)u(x_0, y_0)| \le |u(x_0, y_0)$$

т.е. $M < M$, что невозможно.

Отсюда следует, что на $\overline{J_3}$ функция $u(x,y)$ не достигает своих экстремальных значений.

Таким образом, решение $u(x,y)$ однородной задачи свой положительный максимум и отрицательный минимум достигает лишь на $\overline{\sigma} \cup J_2 \cup \overline{J_1}$. А в силу однородных условий получим

в области Ω . Теорема доказана. $$u(x,y) \equiv 0$$

Существование решения поставленной задачи ТВ эквивалентным образом сведется к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Однозначная разрешимость полученной системы следует из единственности решения задачи ТВ.

Литература:

1. Акбарова С.Х. Об одной краевой задаче для уравнения эллиптико-параболического типа с различными порядками вырождения// Тезисы докладов Международной научной конференции «Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции».- Самара, 1992

2. Салахитдинов М.С., Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнения эллиптико-параболического типа с различными порядками вырождения // Доклады АНРУз.- 1992.- №12.- С.3-5.

3.Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе // Новосибирск: НГУ, 1973.

4. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка //М., 1966.

2014 йил 14 декабрда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.-м.ф.д. Ғ.Мўминов)