JC-АЛГЕБРАЛАР ВА УЛАРНИНГ ҚОБИҚ C*-АЛГЕБРАЛАРИ ТИПЛАРИНИНГ МОСЛИГИ

О.НУРИДДИНОВ, Ф.АРЗИҚУЛОВ

В данной статье исследуются йордановы-банаховы алгебры и их обертывающие ассоциативные банаховы алгебры. Доказано, что тип произвольной AJW-алгебры совпадает с типом её обертывающей C-алгебры.*

In the given article Jordan operator algebras and their enveloping associative operator algebras are investigated. It is proved that the type of an arbitrary AJW-algebra coincides with the type of the enveloping C-algebra of this AJW-algebra.*

Ушбу ишда JB-алгебралар учун уларнинг типларининг таърифлари киритилган. Маълумки, C*-алгебраларнинг I, II_1, II_∞, III типлари мавжуд [1]. JB-алгебралар учун типлар C*-алгебралар учун аниқлангани каби аннуляторлар ёрдамида киритилган. Ушбу ишда JC-алгебралар ва уларнинг қобиқ C*-алгебралари типларининг мослиги ўрганилган. Бунга ўхшаш масалалар JW-алгебралар ва уларнинг қобиқ фон Нейман алгебралари учун Ш.Аюповнинг [2] ва Е.Штёрмернинг [3] ишларида кўрилган. Бундан ташқари, AJW-алгебралар ва уларнинг қобиқ C*–алгебралари ҳолатида бу масала муаллифлардан бирининг [4] илмий ишида ўрганилган. Ушбу мақолада айрим ҳали текширилмаган ҳоллар учун JC-алгебра билан унинг қобиқ C*-алгебраси типлари мос келиши, бир хил бўлиши кўрсатилган.

Мақолада фойдаланилган асосий тушунчаларни эслатиб ўтамиз. A – JB-алгебра бўлсин, $\wp(A)$ – унинг аннуляторлари тўплами бўлсин, яъни $\wp(A)=\{Ann(S):S\subseteq A_+\}$, бу ерда $A_+=\{a^2:a\in A\}$, $Ann(S)=\{a\in A:as=0\ \forall s\in S\}$. У ҳолда $\wp(A)$ тартиб бўйича тўлиқ, ортомодуляр панжара бўлади. Бу ерда ортоқўшимча $\perp$ амали қуйидагича аниқланади: $X^{\perp}=Ann(X)$, $X\in\wp(A)$. Шуни таъкидлаш керакки, X–JC-қисмалгебра ва $Ann(X_+)=Ann(X)$. Агар X– ассоциатив алгебра бўлса, X–абел аннулятори деб аталади. Агар $\wp(X)=\{Y\in\wp(A):Y\subseteq X\}$ қисмтўплам модуляр панжара бўлса, у ҳолда X модуляр аннулятор деб аталади. Ихтиёрий $V\subseteq A$ учун ${}^dV=\{a\in A:\ xay+yax=0,\ \forall x,y\in V\}$ бўлсин. У ҳолда, агар ${}^dX\cap{}^dAnn(X)=\{0\}$ бўлса, X марказий аннулятор деб аталади. Барча марказий аннуляторлар тўпламини $Z(\wp(A))$ деб белгилаймиз. $Z(\wp(A))$ тўплам $\wp(A)$ панжаранинг тартиб бўйича тўла қисмпанжарасидир.

Таъриф. Агар A JB-алгебрада X абел аннулятори мавжуд бўлса ва

$$inf\{Y\in Z(\wp(A)):Y\subseteq X\}=A\in\wp(A)$$

бўлса, у ҳолда A I типдаги JB-алгебра деб аталади. Агар A JB-алгебранинг $\wp(A)$ панжараси модуляр бўлиб, A алгебрада нолдан фарқли абел аннулятори мавжуд бўлмаса, у ҳолда A II_1 типдаги JB-алгебра дейилади. Агар A JB-алгебранинг ҳеч қайси марказий аннулятори модуляр бўлмаса ва ихтиёрий марказий $X\in Z(\wp(A))$ аннулятор ўзида ётувчи нолдан фарқли $X\supseteq Y\in\wp(A)$ –модуляр аннуляторга эга бўлса, у ҳолда A II_∞ типдаги JB-алгебра дейилади. Агар A JB-алгебрада нолдан фарқли модуляр аннулятор мавжуд бўлмаса, у ҳолда A III типдаги JB-алгебра деб аталади.

Шуни таъкидлаш керакки I, II_1, II_∞, III типдаги C*-алгебралар [1] мақолада киритилган ва ўрганилган.

Маълумки, JBW-алгебраларнинг I, II_1, II_∞, III типлари проекторлар орқали аниқланади. Аммо JBW-алгебралар учун берилган мақолада киртилган I, II_1, II_∞, III типларнинг таърифлари JBW-алгебраларнинг проекторлар орқали аниқланган I, II_1, II_∞, III типлари таърифларига тенг кучлидир.

Теорема 1. A–C*-алгебра, $A_{sa}=\{a\in A:\ a^*=a\}$ бўлсин. У ҳолда A_{sa} JC-алгебра F типга эга бўлади, шу ва фақат шу ҳолда, қачонки A C*-алгебра F типга эга бўлса, бу ерда F=I, II_1, II_∞, III.

Исбот. Қуйидаги белгилашларни киритамиз $Ann(S)=\{a\in A:as+sa=0\ \ \forall s\in S\}$, $\wp(A)=\{Ann(S):S\subseteq A_+\}$, $A_+=\{aa^*:\ a\in A\}$. Равшанки, $Ann(S)\in\wp(A)$ учун $Ann(S)_+=\{a\in Ann(S):\ a^*=a\}$ тўплам A_{sa} JC-алгебранинг аннулятори бўлади. Демак $\varphi:X\to X_{sa},\ X\in\wp(A)$ акслантириш $\wp(A)$ ва $\wp(A_{sa})$ орасидаги панжаралар изоморфизмидир. Бунинг учун φ–суръектив акслантириш эканини кўрсатиш етарли. $X\in\wp(A_{sa})$ учун $X+iX$ C*-алгебра бўлади. Таъриф бўйича шундай $S\subseteq A_+$ мавжудки, $X=Ann_{A_{sa}}(S)=\{a\in A_{sa}\ :as+sa=0\ \ \forall s\in S\}$. $Ann_A(S)=X+iX$ эканини кўрсатамиз. Ихтиёрий $a+ib\in Ann_A(S)$, $a,b\in A_{sa}$ учун $s(a+ib)+(a+ib)s=0\ \ \forall s\in S$ бўлгани учун, $(sa+as)+i(sb+bs)=0$ ва $A_{sa}\cap iA_{sa}=\{0\}$ шартга кўра, $sa+as=0$, $sb+bs=0$. Бундан $a,b\in Ann_{A_{sa}}(S)$. Демак, $a,b\in X$ ва $Ann_A(S)=X+iX$. Демак, φ – изморфизмдир.

Агар X – абел аннулятори бўлса, $X_{sa}\in\wp(A_{sa})$ ҳам абел аннулятори бўлади. Бундан X аннулятор $\wp(A)$ панжарада модуляр (абел аннулятори) бўлади, шу ва фақат шу ҳолатда, қачонки X_{sa} аннулятор $\wp(A_{sa})$ панжарада модуляр (абел аннулятори) бўлса. Бундан 1-теорема келиб чиқади. □

Лемма 2. A – AJW–алгебра, $C^*(A)$ – унинг қобиқ C*-алгебраси, $R^*(A)$ – қобиқ ҳақиқий C*–алгебраси ва $R^*(A)\cap iR^*(A)=\{0\}$ бўлсин. У ҳолда $\wp(A)$ панжарани $\wp(C^*(A))$ панжарага тартиб бўйича тўла қисмпанжара сифатида ётқизиш мумкин.

Исбот. $P(A)$ – A алгебранинг проекторлари тўплами ва $p\in P(A)$ бўлсин. У ҳолда $\varphi:U_p(A)\to pC^*(A)p$ акслантириш лемма шартига қаноатлантирувчи ётқизишни бажаради. Хақиқатан ҳам, $\{X_i\}\subseteq\wp(A)$ тўпламни оламиз. Шундай $\{p_i\}\subseteq P(A)$ мавжудки, $X_i=U_p(A)\ \forall i$. Унга мос келувчи (φ бўйича) $\{p_iC^*(A)p_i\}$ тўпламни оламиз. $X\in\wp(C^*(A))$ учун $p_iC^*(A)p_i\subseteq X\ \forall i$ бўлсин. У ҳолда $S\subseteq C^*(A)_+$, $X=Ann(S)$ учун $sa+as=0\ \forall s\in S,\ \forall a\in p_iC^*(A)p_i,\ \forall i$ ўринли. Хусусан, $sp_i+p_is=0$ ва бундан $sp_i=p_is=0\ \forall s\in S,\ \forall i$. Берилган A алгебранинг $\{p_i\}$ тўпламининг юқори аниқ чегарасини p деб олайлик, яъни $p=sup_A\ p_i$ бўлсин. У ҳолда $C^*(A)=R^*(A)+iR^*(A)$, $s=s_1+is_2$, $s_1,\ s_2\in R^*(A)$, $s_1\in A$, $s_2s_2^*\in A$ бўлгани учун, лемма шартига кўра, $p_is_1=s_1p_i=0$, $s_2p_i=p_is_2=0$ ва бундан $ps_1=s_1p=0$, $ps_2=s_2p=0$. Демак, $ps+sp=sp=ps=0\ \forall s\in S$. Шу билан бирга, $spap+paps=0$ шартдан ихтиёрий $pap\in pC^*(A)p$ учун $spap+paps=0$ келиб чиқади. Демак, $pC^*(A)p\subseteq X$ ва $\{\varphi(X_i)\}$ тўпламнинг $\wp(C^*(A))$ панжарадаги супремуми $pC^*(A)p=\varphi(pAp)$ бўлади. Равшанки, бундан φ леммани қаноатлантиради. □

Юқоридаги лемма асосида қуйидаги теоремани исботлаш мумкин.

Теорема 3. Агар 2-лемма шартлари бажарилса, A алгебра F типида бўлади, шу ва фақат шу ҳолда, қачонки $C^*(A)$ алгебра F типида бўлса, бу ерда F=I, II_1, II_∞, III.

Адабиётлар:

1. Arzikulov F. On the classification problem for C*-algebras. arXiv:1002.4711 v1 [math.OA], 2010.
2. Ayupov S. Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators. Math. Z. 1982. v 181. P253-268.
3. Hanche-Olsen H., Stormer E. Jordan Operator Algebras. Boston etc.: Pitman Publ.Inc. 1984
4. Нуриддинов О. AJW-алгебралар типлари ва уларнинг қобиқ AW*-алгебралари типлари мослиги. // АДУ, Илмий хабарнома.- 2012.- Махсус сон.

Андижон давлат университети,
2012 йил 30 майда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. А.Миладжонов)