ЙИРИК МАСШТАБЛИ СИСТЕМАЛАР ТУРҒУНЛИГИНИНГ УМУМИЙ МАСАЛАСИ

В.Ғ.МИЛАДЖОНОВ, К.Х.ТУРҒУНОВА, Б.Б.АБДУҚОДИРОВ, Ж.МУЛЛАЖОНОВА

В данной работе рассматривается общая задача устойчивости крупномасштабных систем.

The work deals with the general task of stability of large scale systems.

Кўплаб жараёнлар йирик масштабли системалар (ЙМС) орқали моделлаштирилади. Бундай системаларнинг характерли белгилари қуйидагилардир:

1) кўп ўлчовлилик;

2) система структурасининг кўп карралилиги (тўрлар, дарахтлар, иерархик структуралар ва бошқалар);

3) система элементларининг кўп боғламлилиги (қисм системалар орасидаги битта даражадаги ва ҳар хил даражали иерархиялар орасидаги боғланишлар);

4) элементлари табиатининг кўпхиллилиги (машиналар, автоматлар, роботлар, одам-операторлар);

5) система ҳолати ва таркиби ўзгаришининг кўпкарралилиги (система структураси, таркиби ва боғланишларнинг ўзгарувчанлиги);

6) системанинг кўп критериялилиги (қисм системалар учун ҳар хил локал критериялар ва тўла система учун глобал критериялар, уларнинг қарама-қаршилиги).

7) система ёки унинг элементлари табиатига хос бўлган баъзи бир хусусий белгилар.

Бу белгилар система динамик хоссаларини (турғунлик, бошқарувчанлик, кузатувчанлик, оптималлик) ўрганишда маълум қийинчиликларга олиб келади.

§1. Масаланинг қўйилиши

Маълумки, Ляпунов функциясини қуришнинг умумий алгоритми мавжуд бўлмагани учун юқоридаги характерли белгиларга эга бўлган системалар турғунлигини таҳлил қилишда ҳосил бўладиган қийинчиликлар Ляпуновнинг тўғри усулини эффектив равишда қўллаш имконини бермайди.

Шунинг учун қаралаётган системани соддалаштириш ёки бошқа система билан алмаштириш билан боғлиқ бўлган бир қанча йўналишлар пайдо бўлиб, буларда турғунлик (турғунмаслик) масаласи бевосита берилган системани текшириш йўли билан эмас, балки бу оралик системаларни текшириш йўли билан ҳал этилади.

Йирик масштабли системалар турғунлигининг умумий масаласи қуйидагича икки хил кўринишда қўйилади:

А муаммо: ЙМС ўзаро боғлиқ бўлган қисм системаларга декомпозиция қилинган (ажратилган) бўлсин. Шундай шартларни аниқлашимиз кераккки, буларда системанинг Ляпунов бўйича турғунлиги ўзаро боғлиқ бўлмаган қисм системаларнинг турғунлигидан ва улар орасидаги боғланишларнинг хоссаларидан келиб чиқсин. Бошқача айтганда, масаланинг бундай қўйилишида, аввал ЙМС. ни ташкил қилувчи ҳар бир эркин қисм система учун Ляпунов функцияси тузилиб, уларнинг турғунлиги (турғунмаслиги)нинг етарли шартлари ҳосил қилинади. Сўнгра бу қисм системалар орасидаги боғланишларнинг хоссаларидан ва эркин қисм системалар турғунлигининг етарли шартларидан фойдаланиб, берилган система турғунлигининг етарли шартлари ҳосил қилинади.

В муаммо: ЙМС ўзаро боғлиқ бўлган қисм системаларга декомпозиция қилинган (ажратилган) бўлсин. Система тартиби пасайишини таминлайдиган шундай шартларни аниқлашимиз кераккки, унда қаралаётган системанинг турғунлиги ўзаро боғлиқ бўлган қисм системалар хоссаларидан келиб чиқиб, бунда эркин қисм системалар турғунлиги хақидаги маълумотлардан фойдаланилмайди. Бошқача айтганда, масаланинг бундай қўйилишида ҳар бир қисм система учун Ляпунов функцияси танланиб, улар ёрдамида қаралаётган система учун Ляпунов функцияси тузилади ва қаралаётган система турғунлигининг етарли шартлари ҳосил қилинади.

Бу кўрсатилган муаммолар ЙМС турғунлигини текшириш билан шуғуланувчи мутахассислар учун бош йўналишларни аниқлаб берди. Уларни ҳал этиш йўлида бир қанча математик усуллар яратилди ёки ривожлантирилди. Жумладан, Ляпуновнинг вектор-функцияси усули, векторли нормалар усули, минимаксли усул, Ляпунов матрица функцияси усули ва бошқалар.

§2. Йирик масштабли системаларнинг декомпозицияси.

Фараз қилайлик (S) ЙМС ҳолати қуйидаги дифференциал тенглама билан ифодалансин.

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad (1)$$

бу ерда $t \in T = [t_0, \infty) \subset R$, $x \in R^n$, $f \in F$ бўлиб, F оила қуйидагича аниқланади:

$$F = \{f^1, f^2, \dots, f^N\}, f^k : T \times R^n \to \mathrm{R}^n, \quad (2)$$

N-ҳақиқий сон.

Агар (S) ЙМС s та қисм системалардан ташкил топган бўлса, у ҳолда (S) ЙМСни (S_i) ўзаро боғлиқ бўлган қисм системалардан ташкил топган деб қараш мумкин бўлиб, (S_i) ўзаро боғлиқ бўлган қисм системалар қуйидаги тенгламалар билан ифодаланади:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t,x), \ \forall i = 1,2,\dots,s \quad (3)$$

Бу ерда x ва f векторлар қуйидагича аниқланади:

$$x = (x_1^T, x_2^T, \dots, x_s^T)^T, \qquad f = (f_1^T, f_2^T, \dots, f_s^T)^T,$$

шунингдек,

$$f_i \in F_i, \ F_i = \left(f_i^1, f_i^2, \dots, f_i^N\right), \ f_i^k : T \times R^n \to R^{n_i},$$

$$\forall k = 1,2,\dots,N, \ n_1 + n_2 + \cdots n_s = n, \ i = 1,2,\dots,s.$$

$\mathrm{f_i}$ функциялар барча $t \in R$ да, фақат ва фақат x=0 дагина

$$f(t,x)=0$$

шартни қаноатлантиради.

$$\mathrm{x}^i = \left(O^T, O^T, \dots, x_i^T, O^T, \dots, O^T\right)^T, \qquad i = 1,2,\dots,s$$

белгилаш киритамиз,

$$g_i : T \times R^{n_i} \to R^{n_i},$$

функцияни

$$g_i(t,x_i) = f_i\left(t,x^i\right)$$

тенглик билан аниқлаймиз.

У ҳолда $(\hat{S}_i)$ i – эркин қисм система

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(t,x_i), \quad (4)$$

бу ерда $x_i \in R^{n_i}$,

$$f_i^*(t,x) = f_i(t,x) - g_i(t,x_i), \qquad \forall i = 1,2,\dots,s \quad (5)$$

ифода ёрдамида аниқланган f_i^* функция (S) системани ўзининг (S_i) i қисм системасига таъсирини ифодалайди.

(4) ва (5) га асосан (3) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(t,x_i) + f_i^*(t,x), \quad \forall i = 1,2,\dots,s \quad (6)$$

Агар

$$g = (g_1^T, g_2^T, \dots, g_s^T)^T, \qquad f^* = \left(f_1^{*T}, f_2^{*T}, \dots, f_s^{*T}\right)^T,$$

деб олсак, (6) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{dx}{dt} = g(t,x) + f^*(t,x), \quad (7)$$

(S) ЙМСни (6) кўринишда декомпозиция қилиш назарий бўлиб, амалий татбиқларда бу бир мунча ноқулайдир. Масалан (5) тенглик ёрдамида f_i^* функцияларни ҳар доим ҳам аниқлаш қулай бўлавермайди. Шунинг учун (S), ЙМСни декомпозиция қилишни қулайлаштириш мақсадида, ҳар бир s та (S_i) қисм системалардан иборат бўлган ЙМС билан sxs тартибли матрица ўртасида қуйидагича ўзаро бир қийматли мослик ўрнатамиз:

1. (S) ЙМСнинг $(\hat{S}_i)$ эркин қисм системаларини матрицанинг бош диагоналига мос қўямиз;

2. $(\hat{S}_i)$ қисм системаларнинг $(\hat{S}_j)$ қисм системага таъсирини ифодаловчи функцияни i-сатр ва j-устун кесишган жойга мос қўямиз. Натижада матрицанинг бош диагоналида эркин қисм системалар бўлиб, бош диагоналдан ташқарида бу эркин қисм системалар орасидаги тўғри ва тескари боғланишлар бўлади.

Бундай мослик ўрнатилгандан кейин (1) система қуйидаги кўринишларнинг бирига келади:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad (9)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(x), \quad (10)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t,x), \quad (11)$$

бу ерда A, A(t), A(x), A(t,x) – бош диагоналга нисбатан симметрик бўлган sxs тартибли квадрат матрицалар.

(8), (9), (10), (11) системаларни декомпозиция қилиш масаласи мос равишда A, A(t),A(x), A(t,x) - матрицаларни блок матрицаларга ажратиш масаласи билан тенг кучли бўлгани учун (S) ЙМСни декомпозиция қилиш масаласи матрицани блок матрицаларга ажратиш масаласига келади.

Мисол тариқасида (8) системани баъзи хусусий ҳолларда декомпазиция қилиш усулларини қараб чиқамиз. Фараз қилайлик, A матрица марказга нисбаттан симметрик бўлган sxs ўлчовли квадрат матрица бўлсин. У ҳолда (8) системани қуйидагича усулларда декомпазия қилиш мумкин:

1.Вертикал ва горизантал симметрия ўқларга нисбатан декомпазиция қилиш. Бу ҳолда (8) система n=2k да

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + B_1 z, \\ \dot{z} &= B_1^0 y + A_1^0 z, \end{aligned} \quad (12)$$

кўринишга , n=2k+1 да эса

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_1 y + a_2 x_{k+1} + B_1 z, \\ \dot{x}_{k+1} &= a_1^T y + a_{k+1,k+1} x_{k+1} + (a_1^T)^0 z \quad (13) \\ \dot{z} &= B_1^0 y + a_2^0 x_{k+1} + A_1^0 z, \end{aligned}$$

кўринишга келади. Бу ерда эркин қисм системалар

$$\dot{y} = A_1 y, \quad (14)$$

$$\dot{z} = A_1^0 z, \quad (15)$$

$$\dot{x}_{k+1} = a_{k+1,k+1} x_{k+1}. \quad (16)$$

кўринишларда бўлиб, A_1, B_1 - к-тартибли квадрат матрицалар, A_1^0, B_1^0 -мос равишда уларни марказга нисбатан транспонирланган, векторлар эса

$$a_1 = (a_{k+1,1}, a_{k+1,2}, ..., a_{k+1,k})^T,\ a_2 = (a_{k+1,k+2}, a_{k+1,k+3}, ..., a_{k+1,n})^T,$$
$$y = (x_1, x_2, ..., x_k)^T,\ z = (x_{k+2}, x_{k+3}, ..., x_n)^T,\ x = (y^T, x_{k+1}, z^T)^T.$$

кўринишда аниқланган.

(8) система мувозанат ҳолати турғунлигининг етарли шартларини ҳосил қилиш учун, (12) система ва (14), (15) қисм системаларга мос Ляпунов матрица функцияси қуйидаги кўринишда танланади:

$$U_1(y,z) = \begin{pmatrix} v_{11}(y) & v_{12}(y,z) \\ v_{21}(y,z) & v_{22}(z) \end{pmatrix}, \quad v_{12} = v_{21}, \quad (17)$$

бу ерда $v_{11}(y) = y^T P_1 y,\ v_{22}(z) = z^T P_1^0 z,\ v_{12}(y,z) = v_{21}(y,z) = y^T P_2 z,\quad P_1,\ P_1^0$ - бош диагоналга нисбатан симметрик бўлган мусбат аниқланган матрицалар, P_2 - ўзгармас матрица бўлиб, буларнинг барчаси к-тартибли матрицалардир.

(13)система ва (14), (15), (16) қисм системаларга мос Ляпунов матрица функцияси эса қуйидагича танланади.

$$U_2(y, x_{k+1}, z) = (v'_{ij}), \quad i, j = 1,2,3, \quad v'_{ij} = v'_{ji} \quad (18)$$

бу ерда $v'_{11} = v_{11}(y),\ v'_{12} = \alpha_{12} x_{k+1} y,\ v'_{13} = v_{12}(y, z),\ v'_{21} = v'_{12},\ v'_{22} = \alpha_{22} x_{k+1}^2, v'_{23} = \alpha_{23} x_{k+1} z,$ $v'_{33} = v_{22}(z),\ v'_{31} = v'_{13}, v'_{32} = v'_{23}$, P_1, P_1^0, P_2-матрицалар (17) дагидек аниқланади, $\alpha_{22} > 0$, α_{12}, α_{23} лар – ҳақиқий сонлар.

2.Ўзаро мувозанатлашувчи қисм системаларга нисбатан декомпозиция қилиш. Бу ҳолда (8) система n=2k да

$$\dot{y}_i = A_{ii} y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{k} A_{ij} y_j, \quad i = 1,2,...,k = \frac{n}{2} \quad (19)$$

кўринишга, n=2k+1 да эса,

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= A_{ii} y_i + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{k} A_{ij} y_j + a_i x_{k+1}, \quad i = 1,2,...,k = \frac{n-1}{2}, \\ \dot{x}_{k+1} &= a_{k+1,k+1} x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i y_i, \end{aligned} \quad (20)$$

кўринишга келади. Бу ерда

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,n+1-i} \\ a_{i,n+1-i} & a_{ii} \end{pmatrix}, \qquad A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{i,n+1-j} \\ a_{i,n+1-j} & a_{ij} \end{pmatrix},$$

$$a_i = (a_{i,k+1}, a_{i,k+1})^T, \qquad a_j = (a_{k+1,j}, a_{k+1,j})^T,$$

$$y_i = (x_i, x_{n+1-i})^T, \qquad y = (y_1^T, y_2^T, ..., y_k^T)^T,\ i, j = 1,2,...,k,\ i \neq j,$$

бўлиб, A_{ii} ва A_{ij} лар матрица марказига нисбатан симметрик бўлган матрицалардир. Бу ҳолда і- эркин қисм системалар

$$\dot{y}_i = A_{ii} y_i \quad (21)$$

кўринишда бўлиб, уларнинг мувозанат ҳолати турғунлигининг етарли шартлари

$$a_{ii} < 0,\ |a_{ii}| > |a_{i,n+1-i}|,\ i = 1,2,...,k \quad (22)$$

шартдан

$$\dot{x}_{k+1} = a_{k+1,k+1} x_{k+1} \quad (23)$$

қисм система учун мувозанат ҳолат турғунлигининг етарли шарти

$$a_{k+1,k+1} < 0. \quad (24)$$

дан иборат бўлади. (19) ва (20) системалар ҳамда (21), (23) қисм системалар учун юқоридаги каби Ляпунов матрица функцияларини тузиш мумкин.

§3. Ляпунов матрица функцияси усули.

Ляпуновнинг матрица функцияси усули ЙМСлар турғунлиги масаласи билан шуғуланувчи мутахассислар томонидан яратилган бўлиб, унинг моҳияти қуйидагича: Аввал (4) қисм системаларнинг ҳар бири учун $v_{ii}(t, x_i)$, i=1,2,…,s Ляпунов функциялари тузилиб, (S_i) ва (S_j) қисм системалар орасидаги таъсирларни ифодаловчи боғланишларга мос

$$v_{ij}(t, x_i, x_j) = v_{ji}(t, x_i, x_j), \quad \text{i,j=1,2,…,s}$$

функциялар шундай танланадики, унда

$$U(t,x)=\begin{pmatrix} v_{11}(t,x_1) & v_{12}(t,x_1,x_2) & \dots & v_{1s}(t,x_1,x_s) \\ v_{12}(t,x_1,x_2) & v_{22}(t,x_2) & \dots & v_{2s}(t,x_2,x_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{1s}(t,x_1,s_2) & v_{1s}(t,x_2,x_s) & \dots & v_{ss}(t,x_s) \end{pmatrix} \quad (25)$$

матрица функция мусбат аниқланган бўлсин. Сўнгра (6) система учун Ляпунов функцияси (25) матрица функция ва $\eta=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_s)^T$ ўзгармас вектор ёрдамида қуйидагича тузилади:

$$\mathrm{V(t,x)}=\eta^{\mathrm{T}}\mathrm{U(t,x)}\eta \quad (26)$$

(25) матрица функциянинг мусбат аниқланганлик шартларидан фойдаланиб, (26) скаляр функциянинг мусбат аниқланганлик шартини қуйидаги кўринишда аниқлаймиз:

$$\mathrm{V(t,x)}\geq\psi^{T}(\mathrm{x})\mathrm{H}^{\mathrm{T}}\mathrm{BH}\psi(\mathrm{x}), \quad (27)$$

бу ерда $\psi^{T}(\mathrm{x})=(|\psi_1(x)|,|\psi_2(x)|,\dots,|\psi_s(x)|)$, $H=H^{T}=diag(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_s)$, В ўзгармас матрица бўлиб, унинг элементлари (25) матрица функция элементларини қуйидан баҳолашда ҳосил бўладиган ўзгармасларнинг алгебраик йиғиндисидан иборат бўлади. (27) тенгсизликдан кўринадики, агар В ўзгармас матрица мусбат аниқланган бўлса, (26) функция ҳам мусбат аниқланган бўлади.

(26) функциядан (6) система ёрдамида олинган тўла ҳосилани юқоридан баҳолаб, қуйидаги тенгсизликка келамиз:

$$\dot{V}(\mathrm{t,x})\leq\psi^{T}(\mathrm{x})\mathrm{G}\psi(\mathrm{x}) \quad (28)$$

бу ерда G ўзгармас матрица бўлиб, унинг элементлари (25) матрица функция элеменларидан (4) қисм системалар ва (6) система ёрдамида олинган ҳосилаларни юқоридан баҳолаш натижасида ҳосил бўладиган ўзгармаслар ва η_i, i=1,2,…,s лар иштирокида тузилган ифодалардан иборат бўлади. (28) дан кўринадики, $\dot{V}(\mathrm{t,x})$ манфий (ярим манфий) аниқланган бўлиши учун G- ўзгармас матрицанинг манфий (ярим манфий) аниқланган бўлиши етарлидир.

(27) ва (28) тенгсизликлардан фойдаланиб, (1) ёки (6) система мувозанат ҳолати асимптотик турғунлиги (турғунлиги)нинг етарли шартларини қуйидагича ифодалаймиз.

Теорема: (1) тенглама билан ифодаланган (S) ЙМС (6) кўринишда декомпозиция қилинган бўлиб, унинг учун (25) матрица-функция тузилган бўлсин.

Агар В матрица мусбат аниқланган бўлиб, G матрица ярим манфий (манфий) аниқланган бўлса, (1) система мувозанат ҳолати x=0 турғун (асимптотик турғун) бўлади.

Эслатма: А муаммони ҳал этишда (25) матрица функция бош диагоналидаги $v_{ii}(t,x_i),\ \mathrm{i}=1,2,\dots,\mathrm{s}$ элементлардан (4) қисм системалар бўйича олинган ҳосилалар алоҳида баҳоланиши шарт, чунки бу баҳо ёрдамида $(\hat{S}_i)$, i=1,2,…,s эркин қисм системаларнинг турғунлиги масаласи ҳал этилади. В муаммони ҳал этишда эса бундай баҳолаш шарт эмас.

Адабиётлар:

1. Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. − Киев.: Наукова думка, 1984. − 307 с.

2. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема А. // Электронное моделирование. – Киев,1992. –№1. - С. 3-10.

3. Мартынюк А.А., Миладжанов В.Г. Об устойчивости крупномасштабных систем при структурных возмущениях. Проблема Б. // Электронное моделирование. – Киев, 1992. –№ 4. - С. 35-42.

4. Муллажонов Р.В. Обобщенное транспонирование матриц и структуры линейных крупномасштабных систем // Украинский журнал «Док.НАН Украини». − Киев, 2009. - №11.С. 27 −35.

5. Муллажонов Р.В. Анализ устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Проблема механики. − Ташкент, 2010. − №2.− С. 4− 7.

Андижон давлат университети,
2012 йил 27 апрелда қабул қилинган