О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ

С.Х.Акбарова, М.Х.Акбарова

Мақола аралаш типдаги эллиптик-параболик тенглама учун интеграл шартли чегаравий масалани ўрганишга бағишланган.

Калит сўзлар: *бузилиш чизиғи, бузилиш чизиғининг тартиби, аралаш типдаги тенглама, интеграл шартли чегаравий масала, регуляр ечим.*

В статье исследуется краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного эллиптико-параболического типа с разрывными условиями склеивания.

Ключевые слова: *линия вырождения, порядок линии вырождения, уравнение смешанного типа, краевая задача с интегральным условием, регулярное решение.*

The article is devoted to the study of boundary value problem with integral condition for elliptical-parabolic equation of mixed type.

Key words*: lines of degeneration, order of lines of degeneration, equation of mixed type, boundary value problem with integral condition, regular solution.*

Известно, что краевые задачи для уравнения смешанного эллиптико-параболического типа с двумя линиями вырождения в неограниченной и ограниченной областях исследованы в работах [1-2].

Рассмотрим уравнение:

$$0=\begin{cases} y^{m_1}u_{xx}-x^{n_1}u_y, x>0, \\ y^{m_2}u_{xx}+(-x)^{n_2}u_{yy}, x<0 \end{cases} \qquad (1)$$

в области Ω, ограниченной отрезками *OA, AB, BB$_0$* прямых $y=0$, $x=h_1$, $y=h$ при $x>0$, $y>0$ и гладкой кривой

$$\sigma: \frac{1}{q_2^2}(-x)^{2q_2}+\frac{1}{p_2^2}y^{2p_2}=1$$

с концами в точках $A_0(-h_2,0)$, $B_0(0,h)$ и отрезком A_0O прямой $y=0$ при $x<0$, $y>0$, где

$$m_k, n_k = const (k=1,2),\ h_1=(2q_1)^{1/q_1},\ h_2=q_2^{1/q_2},\ h=p_2^{1/p_2},$$

$$2q_1=n_1+2,\ 2q_2=n_2+2,\ 2p_2=m_2+2.$$

Введем обозначения: $J=\{(x,y): x=0, 0<y<h\}$, $J_1^+=\{(x,y): y=0, 0<x<h_1\}$,

$J_1^-=\{(x,y): y=0, -h_2<x<0\}$.

ЗадачаTI. Определить функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) удовлетворяет разрывным условиям склеивания вида

$u(+0,y)=u(-0,y)+\alpha(y), 0\le y\le h,$

$u_x(+0,y)=\beta(y)u_x(-0,y)+\gamma(y), 0\le y\le h;$

1) $u(x,y)\in C^1(\Omega)$;

2) $u(x,y)$ - является регулярным в области Ω / J решением уравнения (1);

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)\big|_{\sigma} = \psi_1(x,y),\ (x,y)\in\sigma, \tag{2}$$

$$u_y\Big|_{y=0} = \psi_2(x),\ -h_2 < x < 0, \tag{3}$$

$$u\big|_{y=0} = 0,\ 0\le x\le h_1, \tag{4}$$

$$u(h_1,y) + \sum_{i=1}^{n} \theta_i(y) \int_{x_i(y)}^{x_{i+1}(y)} u(x,y)dx = \varphi(y),\quad 0\le y\le h_2, \tag{5}$$

где $\psi_1(x,y),\ \psi_2(x),\ \varphi(y),\ \theta_i(y), i=\overline{1,n}$ заданные функции, причем

$$\varphi_1(x)\in C(0\le x\le h_1)\cap C^2(0<x<h_1),$$

$$\varphi_2(y)\in C[0,h]\cap C^2(0,h), \phi\quad \theta_i(y)\in C[0,h]\cap C^2(0,h),$$

$x = x_i(y), i=\overline{1,n+1}$ - заданные функции из класса $C^1[0,h_1]$, причем

$$0\le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}\le h_1,\ 0\le n<\infty;$$

функция $\psi_1(x,y)$ имеет вид

$$\psi_1(x,y) = xy\overline{\psi_1}(x,y), \overline{\psi}_1(x,y)\in C(\overline{\sigma})$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0),\ \theta_i(0) = 0.$$

Теорема единственности. Пусть имеет место неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} h_1\left|\theta_i(y)\right|\left|x_{i+1}(y) - x_i(y)\right| \le 1. \tag{6}$$

Тогда задача TI имеет единственное решение.

Принцип экстремума. Если выполнены условия (6) и

$$\varphi(y) = 0,$$

то решение $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ задачи принимает свои экстремальные значения в замкнутой области $\overline{\Omega}$ лишь на $\overline{\sigma}\cup J_1^-\cup\overline{J_1^+}$.

Доказательство. Докажем для положительного максимума. В силу принципов экстремума для параболических и эллиптических уравнений [3-4] решение $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ *свой* положительный максимум в *замкнутой области* $\overline{\Omega}_1$ *и* $\overline{\Omega}_2$ *может достигать лишь на* $\overline{J}\cup\overline{J_1^+}\cup\overline{J_1}$ *и* $\overline{\sigma}\cup J_1^-\cup\overline{J}$. *соответственно. Очевидно,* на $\overline{J_0}$ не существует положительного максимума.

Предположим, что в точке $(h_1,y_0)\in\overline{J_1}$ достигается положительный максимум:

$$\left|u(h_1,y_0)\right| = \max_{\overline{\Omega}}\left|u(x,t)\right|.$$

Учитывая условия (5) и (6), имеем неравенство

$$\left|u(h_1,y_0)\right| < \left|\theta(y)\right| h_1 u(h_1,y_0) \le u(h_1,y_0),$$

что невозможно.

Значит, мы доказали, что положительный максимум достигается на $\overline{\sigma} \cup J_1^- \cup \overline{J_1^+}$. А для отрицательного минимума доказательство аналогично.

Доказательство теоремы. Предположим обратное. Пусть однородная задача TI имеет решение

$$u(x,y) \neq const.$$

Тогда эта функция может достигать своих экстремальных значений лишь на части $\overline{\sigma} \cup J_1^- \cup \overline{J_1^+}$. *А* в силу однородных условий имеем

$$u(x,y) = 0$$

в области Ω, что и требовалось доказать.

При определенных ограничениях на порядках линии вырождения, существование решения задачи эквивалентным образом сведется к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Однозначная разрешимость этой системы непосредственно следует из единственности решения поставленной задачи.

Литература:

1. Салахитдинов М.С., Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнения эллиптико-параболического типа с различными порядками вырождения // Доклады АНРУз.- 1992. - №12.- С.3-5.

2. Акбарова С.Х. О нелокальной краевой задаче с интегральным условием для смешанного эллиптико-параболического уравнения // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» 15-17 апреля 2015 г., С.264-266.

3. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе.- Новосибирск, 1973.- 144 с.

4. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.- М.: Наука, 1966. -204 с.

Андижон давлат университети,
Тошкент ахборот технологиялари университети,
2015 йил 10 июнда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.м.ф-н. Ғ.Мўминов)