ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА ХОДЖКИНА-ХАКСЛИ

А.Давлатов, Д.Тошпулатов, Р.Умаров

Мақолада Хочкин-Хаксли туридаги тенгламалар системаси учун иккинчи чегаравий масала ечимининг мавжудлиги, ягоналиги ва берилган шартларга узлуксиз боғлиқлиги қаралади.

***Калит сўзлар**: Липшиц шарти, Коши масаласи, биринчи ва иккинчи чегаравий масалалар, интеграл тенгламалар системаси, Вольтерранинг иккинчи тур тенгламаси, максимум принципи, кетма-кет яқинлашиш усули.*

В статье рассматривается корректность второй краевой задачи для системы уравнений типа Ходжкина-Хаксли.

***Ключевые слова**: условия Липшица, задачи Коши, первая краевая задача, вторая краевая задача, система интегральных уравнений, уравнения Вольтерра второго рода, принцип максимума, метод последовотельных приближений.*

In this article the author studies the correctness of the presence of the solution of the second bordery settlement, its uniqueness and its continuous connection of the given conditions in the Hochkin-Hucsly type equations.

***Key words**: condition of Lipshis, Koshi propositions, The first bordery proposition, The second bordery proposition, The systems of integral equations, Volterr equation of the second type, The principle of maximum, The method of consecutive approximations.*

---

1. Введение. В приложениях математики к нейрофизике, химическому катализу возникают начально краевые задачи для системы типа Ходжкина-Хаксли, имеющие вид [1,2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f\big(x,t,u(x,t),v(x,t)\big), \frac{\partial v}{\partial t} = h\,, \qquad (1)$$

где $(x,t)\epsilon D = (o,1)\times(0,t), u = (u_1,u_2,\dots,u_n), v = (v_1,v_2,\dots,v_n)$.

Вектор-функции f и h непрерывны, локально-липшициевы по u,v и удовлетворяют неравенству $|f(x,t,u,v)+h(x,t,u,v)| \le C(1+|u|+|v|)$ в области $X = D\times R^n \times R^m$.

Вопросы численного решения рассмотрены в [3,4]. В[5]доказана корректность задачи Коши $(x\epsilon(-\infty,\infty))$. В работах [6,7] изучена первая краевая задача $x\epsilon[0,1]$.

В этой работе вторая краевая задача для системы (1) ставится в форме

$$u(x,0) = \varphi(x), v(x,0) = \psi(x), \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_0(t), \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \mu_1(t), \quad (2)$$

$$v(0,t) = \nu_0(t), v(1,t) = \nu_1(t), \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(x),\psi(x),\mu_0(t),\mu_1(t),\nu_0(t),\nu_1(t) \textit{непрерывны} \varphi(0) = \mu_0(0), \varphi(1) = \mu_1(0), \psi(0) = \nu_0(0), \\ \psi\,(1) = \nu_1(t) \end{pmatrix}$$

Здесь исследуется разрешимость второй краевой задачи (1), (2) при $x\epsilon[0,1]$ в классе $u,v,\frac{\partial u}{\partial x}\epsilon C(\overline{D})$; $\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial v}{\partial t}\epsilon C(D)$.

2.Сведение второй краевой задачи к системе интегральных уравнений методом тепловых потенциалов.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t), 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T \qquad (4)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_0(t), \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=1} = \mu_1(t), \quad (6)$$

где функции $g(x,t), \varphi(x), \mu_0(t), \mu_1(t)$ непрерывны.

Пусть

$$\bar{g}(x,t) = \begin{cases} g(0,t) \\ g(x,t), \\ g(1,t) \end{cases} \quad \bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(0), & при -\infty < x < 0, \\ \varphi(x), & при\ 0 \le x \le 1, \\ \varphi(1), & при\ 1 < x < \infty \end{cases}.$$

Решение $\bar{U}(x,t)$ задачи Коши

$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = \bar{g}(x,t), -\infty < x < \infty, 0 \le t \le T\ \bar{u}(x,0) = \bar{\varphi}(x)$задается формулой

$\bar{u}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y,t)\bar{\varphi}(y)dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y,t-\tau)\,\bar{g}(y,t)dyd\tau$,где

$F(x,y,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} exp\left(-\frac{(x-y)^2}{\varphi a^2 t}\right)$–фундаментальное решение, уравнения теплопроводности.

Если $\bar{u}(x,t)$ рассмотреть только области $\bar{D}$, то она удовлетворяет (4), (5), но граничные условия (6) в общем случае не имеют места. Положим $\bar{u}_i(t) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\Big|_{x=i}, i = 0{,}1$ и рассмотрим краевую задачу $\frac{\partial \omega}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}, 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T, \omega(x,0) = 0, \frac{\partial \omega}{\partial x}\Big|_{x=i} = \mu_i(t) - u_i(t)$.(7)

Решение задачи (7) выражается через тепловые потенциалы простого слоя:

$$\omega(x,t) = 2a^2 \int_0^t (t-\tau)H(x,t-\tau)\alpha(\tau)d\tau + 2a^2 \int_0^t (t-\tau)H(1-x,t-\tau)d\tau,$$

где $H(x,s) = \frac{1}{s}F(x,0,s)$ и $\alpha(t), \beta(t)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие системе интегральных уравнений Вольтерра 2 рода:

$$\alpha(t) = u_0(t) - \mu_0(t) + \int_0^t H(1,t-\tau)\beta(\tau)d\tau,$$

$$\beta(t) = \mu_1(t) - u_1(t) + \int_0^t H(1,t-\tau)\alpha(\tau)d\tau.$$

Очевидно, функция $u(x,t) = \bar{u}(x,t) + \omega(x,t)$является решением задачи (4)-(6), непрерывно зависящим от исходных данных и свободного члена $g(x,t)$. Единственность решения задачи (4)-(6) также имеет место в силу принципа максимума.

Решение задачи (4) – (6) применим к первому уравнению системы (1), приняв $g(x,t) = f(x,t,u,v)$. С этой целью обратим внимание на тот факт, что если функцииu, v удовлетворяют системе (1) и условиям (2), то пара функций $\lambda_0(t) = u(0,t), \nu_0(t) = v(0,t)$ является единственным решением следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial \lambda_0(t)}{dt} = f\big(0,t,\lambda_0(t),\nu_0(t)\big), \lambda_0(0) = \varphi(0),$$

$$\frac{\partial v_0(t)}{dt} = h\big(0,t,\lambda_0(t),v_0(t)\big), v_0(0) = \psi(0),$$

а$\lambda_1(t) = u(1,t), v_1(t) = v(1,t)$ –единственным решением следующей задачи Коши

$$\frac{d\lambda_1(t)}{dt} = f\big(1,t,\lambda_1(t).v_1(t)\big), \lambda_1(0) = \varphi(1),$$

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = h\big(0,t,\lambda_1(t),v_1(t)\big), v_1(0) = \psi(1).$$

Введем обозначения $f_0(t) = f\big(0,t,\lambda_0(t),v_0(t)\big), f_1(t) = f\big(1,t,\lambda_1(t),v_1(t)\big)$,

$$\Phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y,t)\bar{\varphi}(y)dy + \int_0^t f_0(\tau)\int_{-\infty}^{t} F(x,y,t-\tau)dyd\tau + \int_0^t f_1(\tau)\int_1^{\infty} F(x,y,t-\tau)dyd\tau.$$

Таким образом, справедлива лемма.

Лемма 1. Вторая краевая задача (1), (2) равносильна системе интегральных уравнений

$$u(x,t) = \Phi(x,t) + \int_0^t\int_0^1 F(x,y,t-\tau)f\,(y,\tau,u,v)dyd\tau + 2a^2\int_0^t(t-\tau)H(x,t-\tau)\alpha(\tau)d\tau + 2a^2\int_0^t(t-\tau)H(1-x,t-\tau)\beta(\tau)d\tau, \quad (8)$$

$$v(x,t) = \psi(x) + \int_0^t h(x,\tau u,v)d\tau, \quad (9)$$

$$\alpha(t) = u_0(t) - \mu_0(t) + \int_0^t H(1,t-\tau)\beta(\tau)d\tau, \quad (10)$$

$$\beta(t) = \mu_1(t) - u_1(t) + \int_0^t H(1,t-\tau)\alpha(\tau)d\tau, \quad (11)$$

где, $u_0(t) = \Phi_x(0,t) + \int_0^t\int_0^1 F_x(0,y,t-\tau)f(y,\tau,u,v)dyd\tau$,

$$u_1(t) = \Phi_x(1,t) + \int_0^1\int_0^1 F_x(1,y,t-\tau)f(y,\tau,u,v)dyd\tau.$$

3. Исключение из системы (8) – (11) неизвестных α и β. Почленным сложением и вычитанием последних двух уравнений системы (8)– (11) для неизвестных $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t) + \beta(t), \bar{\beta}(t) = \alpha(t) - \beta(t)$получим отдельные уравнения

$\bar{\alpha}(t) = a(t) + \int_0^t H(1,t-\tau)\bar{\alpha}(\tau)d\tau\,, \bar{\beta}(t) = b(t) - \int_0^t H(1,t-\tau)\,\bar{\beta}(\tau)d\tau$, где $a(t) = \mu_1(t) - \mu_0(t) + u_0(t) - u_1(t)$, $b(t) = u_0(t) + u_1(t) - \mu_0(t) - \mu_1(t)$. Считая функции $a(t), b(t)$ известными, к полученным уравнениям применим метод резольвентного разложения. При этом, например, для функции $\bar{\alpha}(t)$ получим формулу $\bar{\alpha}(t) = a(t) + \int_0^t k(1,t-\tau)a(\tau)d\tau$, в которой ядро имеет вид $K(1,t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(1,t)$, где $H_1(1,t) = H(1,t)$, $H_n(1,t) = \int_0^{t+\tau} H(1,t+\tau-r)\,H_{n-1}(1,r)dr,)n = 2,3,\dots)$

Ядро $H(1,t)$ достигает наибольшего значения в промежутке $[0,\tau]$при $S_0 = \frac{1}{6a^2}$.Если положить $N_0 = H(1,S_0) = \frac{1}{12\sqrt{6\pi e^3}}$,то $H(1,t) \le N_0$. Члены ряда допускают оценку $H_{n+1}(1,t) \le N_0^{n+1}\frac{t^n}{n!}$, так что ряд сходится обсолютно и равномерно на отрезке $[0,T]$. При этом $K(1,t) \le N_0 e^{N_0 t} \le N_0 e^{N_0 T} = N_1$.

Аналогично для $\bar{\beta}(t)$ находим

$$\bar{\beta}(t) = b(t) - \int_0^t K(1, t-\tau)b(\tau)d\tau.$$

Следовательно, функции $\alpha(t), \beta(t)$ выражаются через правые части системы (1):

$$\alpha(t) = \Phi_x(0,t) + \int_0^t \int_0^1 F_x(0,y,t-\tau)f(y,\tau,u,v)dyd\tau - \mu_0(t) + \int_0^t K(1,t-\tau)\Big[\mu_1(\tau) - \Phi_x(1,\tau) - \int_0^\tau \int_0^1 F_x(1,y,\tau-\tau_1)\, f(y,\tau,u,v)dyd\tau\Big]d\tau,$$

$$\beta(t) = \mu_1(t)\int_0^t \int_0^1 F_x(1,y,t-\tau)f(y,\tau,u,v)dyd\tau - \Phi_x(1,t) + \int_0^t K(1,t-\tau)\Big[\Phi_x(0,\tau) - \mu_0(\tau) + \int_0^t \int_0^1 F_x(0,y,\tau-\tau_1)f(y,\tau_1,u,v)dyd\tau_1\Big]d\tau.$$

Подставляя найденные выражения $\alpha(t), \beta(t)$в уравнение (8), получим систему относительно неизвестных$u(x,t), v(x,t)$.

Лемма 2. Вторая краевая задача (1), (2) равносильна системе интегральних уравнений

$$u(x,t) = \Phi(x,t) + \int_0^t \int_0^1 F(x,y,t-\tau)f(y,\tau,u,v)dyd\tau + 2a^2\int_0^t (t-\tau)H(x,t-\tau)\Big[\Phi_x(0,\tau) - \mu_0(\tau) + \int_0^\tau \int_0^1 F_x(0,y,\tau-\tau_1)f(y,\tau,u,v)dyd\tau_1 + \int_0^\tau K(1,\tau-\tau_1)(\mu_1(\tau_1) - \Phi_x\,(1,\tau_1)d\tau_1 - \int_0^\tau K(1,\tau-\tau_1)d\tau_1 \int_0^{\tau_1}\int_0^1 F_x(1,y,\tau_1-\tau_2)f(y,\tau_2,u,v)dyd\tau_2\Big]d\tau + 2a^2\int_0^t (t-\tau)H(1-x,t-\tau)\Big[\mu_1(\tau) - \Phi_x(1,\tau) - \int_0^\tau \int_0^1 F_x(1,y,\tau-\tau_1)f(y,\tau,u,v)dyd\tau_1 + \int_0^t K(1,\tau-\tau_1)d\tau_1 \int_0^{\tau_1}\int_0^1 F_x(0,y,\tau_1-\tau_2)f(y,\tau_2 u,v)dyd\tau_2 + \int_0^\tau K(1,\tau-\tau_1)(\Phi_x(0,\tau_1) - \mu_0(\tau_1)\Big]\,d\tau, \quad (12)$$

$$v(x,t) = \psi(x) + \int_0^1 h(x,\tau,u,v)d\tau.$$

4. Оценка решения второй краевой задачи.

Теорема 1. Пусть пара функций $u(x,t) \in C(2,1)(D_1) \cap C(\overline{D_1})$ является решением системы (1), (2). Тогда существуют положительные константы A, B такие,как$|u(x,t)| \le Ae^{Bt}, |v(x,t)| \le Ae^{Bt}$ при $(x,t) \in \overline{D_1}$.

Доказательство. Сначала, оценивая функции $\Phi(x,t), \Phi_x(o,t)$ и $\Phi_x(1,t)$, получим оценку для $\Phi(x,t)$: $|\Phi(x,t)| \le C_0 + C_0 t \le C_0(1+1)$, где $C_0 = \max_{(k,t)\in\overline{D_1}}\{\bar{\varphi}(x), f_0(t), f_1(t)\}$. Легко увидеть, что $|\Phi_x(0,t)| \le C_0\frac{\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}} = C_1$, аналогично $|\Phi_x(1,t)| \le C_1$.

Используя условие (*), выведем оценки $u_0(t), u_1(t)$:

$$|u_0(t)| \le C_1 + \int_0^t \int_0^1 F_x(o,y,t-\tau)C(1+|u|+|v|)dyd\tau.$$

Введем в рассмотрение функции

$$u(t) = \max_{0\le x\le 1}|u(x,t)|\,, v(t) = \max_{0\le x\le 1}|v(x,t)|,$$

тогда

$$|u_0(t)| \le C_1 + \frac{C\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}} + C\int_0^t \frac{u(\tau)+v(\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau.$$

Аналогично

$$|u_1(t)| \le C_1 + \frac{C\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}} + C\int_0^t \frac{u(\tau)+v(\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau.$$

Таким образом, для функций $\alpha(t), \beta(t)$ имеем оценки:

$$|\alpha(t)| \le C_2 + \frac{C}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u(\tau)+v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \frac{N_1 CT}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t \big(u(\tau)+v(\tau)\big)d\tau$$

где$C_2 = C_1 + \frac{C\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}} + C_1 + N_1\left(\overline{C_1} + C_1 + \frac{C\sqrt{\tau}}{a\sqrt{\tau}}\right)\tau.$

Аналогично

$$|\beta(t)| \le C_2 + \frac{C}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{u(\tau)+v(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau + \frac{N_1 CT}{a\sqrt{\pi}}\int_0^t (u(\tau)+v(\tau))d\tau.$$

Используя полученные оценки, имеем

$$|u(x,t)| \le A_0 + B_0\int_0^t \big(u(\tau)+v(\tau)\big)d\tau,$$

где $A_0,\ B_0$ постоянные числа.

Теперь оценим $v(x,t)$:

$$|v(x,t)| \le |\psi(x)| + \int_0^t |h(x,\tau,u,v)|d\tau \le C_3 + C\tau + C\int_0^t (u(\tau)+v(\tau))d\tau.$$

Это неравенство вместе с$|u(x,t)|$дает

$$|u(x,t)| + |v(x,t)| \le A + B\int_0^t \big(u(\tau)+v(\tau)\big)d\tau,$$

где A, B некоторые постоянные.

Положим,$w(t) = \max_{0\le x\le 1}[|u(x,t)| + v(x,t)]$,тогда:$|u(x,t)| + |v(x,t)| \le w(t) \le u(t) + v(t)$.

$$u(t) + v(t) \le A + B\int_0^t (u(\tau)+v(\tau))d\tau$$

К этому неравенству применим лемму Гронуолла $u(t) + v(t) \le Ae^{Bt}$, следовательно,

$$|u(x,t)| \le Ae \le Ae^{Bt}, |v(x,t)| \le Ae^{Bt}.$$

Следствие. Пусть $u(x,t), v(x,t)$ - решение второй краевой задачи (1),(2), тогда существует константа $M \ge 0$ такая, что

$$|f(u,v,x,t)| \le M, |h(x,t,u,v)| \le M.$$

5. Сходимость последовательных приближений для второй краевой задачи (1), (2).

Положим

$$u_0(x,t) = \Phi(x,t) + \int_0^t 2a^2(t-\tau)H(x,t-\tau)\big[\Phi_x(0,\tau) - \mu_0(\tau) - \int_0^\tau K(1,\tau-\tau_1)(\mu_1(\tau) - \Phi_x(1,\tau_1)d\tau_1\big]d\tau +$$
$$2a^2\int_0^t (t-\tau)H(1-x,t-\tau)\big[\mu_1(\tau) - \Phi(1,\tau) + \int_0^\tau K(1,\tau-\tau_1)\big(\Phi_x(0,\tau_1) - \mu_0(\tau_1)\big)d\tau_1\big]d\tau,$$
$$v_0(x,t) = \psi(x),$$

$$u_{n+1}(x,t) = u_0(x,t) + \int_0^t \int_0^1 F(x,y,t-\tau) f(y,\tau,u_n,v_n)dyd\tau + 2a^2 \int_0^t (t-\tau) H(x,t-\tau)\left[\int_0^\tau \int_0^1 F_x(1,y,\tau_1 - \tau_2) f(y,\tau_2,u_n,v_n)dyd\tau + \int_0^\tau K(1,\tau-\tau_1)d\tau_1 \int_0^{\tau_1}\int_0^1 F_x(1,y,\tau_1-\tau_2)f(y,\tau_2,u_n,v_n)dyd\tau_2\right]d\tau + + 2a^2 \int_0^t (t-\tau)H(1-x,t-\tau)\left[\int_0^\tau K(1,\tau-\tau_1)d\tau_1 \int_0^{\tau_1}\int_0^1 F_x(0,y,\tau_1-\tau_2)f(y,\tau_2,u_n,v_n)dyd\tau_2 - \int_0^\tau \int_0^1 F_x(1,y,\tau-\tau_1)f(y,\tau_1,u_n,v_n)dyd\tau_1\right]d\tau,$$

(13)

$$v_{n+1}(x,1) = \psi(x) + \int_0^t h(x,\tau,u_n,v_n)d\tau, \quad (n = 0,1,2,\dots.).$$

Лемма. Пусть П обозначает параллелепипед

$$\text{П} = \{(x,t,u,v): |u| \le p, |v| \le q, (x,t) \in \bar{D}\}$$

$$\text{и}\delta = min\left\{\frac{3\pi p}{4m(\varphi\mu_1 T)}, \frac{q}{2m}, T\right\}.$$

Тогда итерационный процесс (13) является корректным, а именно, для всех $n = 0,5\ ,2..$ имеет место включение $(x,t) \in D,\ U_n(x,t), V_n(x,t) \in$ П.

Доказательство: из соотношений (13) получим оценку для $U_0(k,t), V_0(x,t)$ следующим образом:

$$|U_0(x,t)| \le c_0(1+T) + \frac{4aA_1\sqrt{T}}{\sqrt{T}}(W_1 T),$$

$|U_0(x,t)| \le |\varphi(\tau)|,$ *где* $A_1 = max|\Phi_x(I,t) - P(t)|, \quad I = 0,10 \le t \le T$.Отсюда видно, что, если положить

$\frac{P}{2} = C_0(1+T) + \frac{4aA_1\sqrt{T}}{\sqrt{A}}(1+N_1 T),\ \frac{q}{2} = C_2 = max|\varphi(x)|,\ 0 \le x \le 1,$ то значения $U_0(x,t), V_0(x,t)$ не выходят из П. Также $|U_1(x,t)| \le \frac{P}{2} + 2\frac{3\pi+4W_1}{3\pi}TMT,$ очевидно, что $V_1(x,t) \le \frac{P}{2} + Mt$согласно методу индукции, получим оценки:$|V_n(x,t)| \le \frac{P}{2} + \frac{2(3\pi+4W_1T)}{3\pi}Mt,$

$|V_n(x,t)| \le \frac{q}{2} + Mt,\ n = 1,2,\dots$

Следовательно, при $0 \le t \le \delta$ имеет место включение $U_n(x,t),\ U_n(\tau,t) \in$ П для всех $n = 1,2,\dots (x,t) \in D$. Лемма доказана.

6. Существование и единственность решения второй краевой задачи (1), (2).

Теорема 2.

Решение второй краевой задачи (1),(2) в области П существует, оно единственно, и является пределом при $n \to \infty$ равномерно по всем $0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T$ сходящейся последовательности $\{U_n(x,t), V_n(x,t)\}$ определенной формулами (13).

Доказательство существования $\{U_n(x,t), V_n(x,t)\}$, определенное формулами (13), при $n \to \infty$ сходится с решением системы (12) и, следовательно,с решением второй краевой задачи (1), (2).

Вопрос о сходимости последовательности $\{U_n(x,t), V_n(x,t)\}$ заменим вопросом о сходимости рядов

$U_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(U_n(x,t) - U_{n-1}(x,t)\right),$ (14)

$$V_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(V_n(x,t) - V_n(x,t)\right).$$

Из формулы (13) при n→ ∞ имеем оценку:

$$|U_1(x,t)-U_0(x,t)| \le 2M_k t, \quad \left(k_1 = 1+\frac{4N_1 T}{3\pi}\right)$$

Кроме того, очевидно, $|V_1(x,t)-V_0(x,t)| \le 2Mt$.

Теперь оценим разности $|U_2(x,t)-U_1(x,t)|$, $|V_2(x,t)-V_1(x,t)|$. Пользуясь условиями Липщица для функции f h а, так же, используя предыдущие оценки, имеем,

$$|U_2(x,t)-U_1(x,t)| \le 2ML(1+2K_1)^2\frac{t^2}{2}$$

Аналогично,$|V_2(x,t)-V_1(x,t)| \le LM(1+2K_1)+\frac{t^2}{2}$, применяя индукцию, легко доказать, что $U_n(x,t)-U_{n-1}(x,t) \le M2^{n-1}L^{n-1}(1+2\,k_1)\frac{t^4}{n!}$,

$V_n(x,t)-V_{n-1}(x,t) \le M2^{n-1}L^{n-1}(1+2\,k_1)\frac{t^4}{n!}$. (15)

Таким образом, для общих членов рядов (14) справедлива оценка (15).

Поскольку ряд $\frac{m}{2L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2L(1+2k_1)T)^n}{n!}$ сходится, по последовательности $\{U_n(x,t),V_n(x,t)\}$при $n \to \infty$ сходится равномерно по $0 \le x \le 1$ и $0 \le t \le T$ к некоторым функциям$\big(U(x,t),V(\tau,t)\big)$.

Переходим к пределу в формуле (13), получим, что эти функции удовлетворяют системе интегральных уравнений (12) и, следовательно, являются решением второй краевой задачи (1), (2).

Доказательство единственности. Пусть функции $U^*(x,t)$, $V^*(x,t)$являются также решением системы интегральных уравнений (12) в области П. Из ограниченности функции и области П имеем оценки:

$$|U(x,t)-U^*(x,t)| \le 2\left(1+\frac{2\mathrm{N}_1 T}{\pi}\right)ct = (\tau k_2 ct), \quad |v(x,t)-v^*(x,t)| \le ct$$

Осуществим переоценку разности $|U(x,t)-U^*(x,t)|$, $|v(x,t)-v^*(x,t)|$, применяя условия Липшица к функциям f, h и используя полученную уже оценку:

$$|U(x,t)-U^*(x,t)| \le CLk_2^2\frac{t^2}{2}$$

$$|V(x,t)-V(x,t)| \le CLk_2^2\frac{t^2}{2}.$$

Если m раз последовательно повторить процесс переоценки, то приходим к неравенствам

$$|U(x,t)-U^*(x,t)| \le \frac{C}{L}\frac{(Lk_2 t)^m}{m!}$$

$$|V(x,t)-V(x,t)| \le \frac{C}{L}\frac{(Lk_2 t)^m}{m!}.$$

Устремляя в этих соотношениях mк∞ получим, что $U(x,t)=U^*(x,t)$

$$V(x,t)=V^*(x,t)$$

Итак, теорема полностью доказана.

Аналогично, доказываются следующие теоремы:

Теорема 3:Имеет место непрерывная зависимость решений от краевых условий (2), а именно, пусть краевым условиям $\varphi(x),\psi(x),\mu_0(t),\mu_1(t)$ соответствуют $u(x,t)$, $v(x,t)$, а условиям $\varphi^*(x),\psi^*(x),\mu^*{}_0(t),\mu^*{}_1(t)$ решение $u^*(x,t)$, $v^*(t)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что,

если $|\varphi(x)-\varphi^*(x)|<\delta, |\psi(x)-\psi^*(x)|<\delta$, $|\mu_0(t)-\mu_0^*(t)|<\delta$, $|\mu_1(t)-\mu_1^*(t)|<\delta$, то в области Π будут выполнены неравенства

$$u(x,t)-\mathrm{u}^*(x,t)<\varepsilon, \quad v(x,t)-v^*(x,t)<\varepsilon.$$

Так же имеет место непрерывная зависимость решения от правых частей системы (1).

Рассмотрим с системой (1) систему с измененными правыми частями $\bar{f}(x,t,u,v)$, $\bar{h}(x,t,u,v)$ при прежних краевых условиях. Решение системы с измененными правыми частями обозначим $\tilde{u}(x,t)$, $\tilde{v}(x,t)$.

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$, что, если $\left|f(x,t,u,v)-\bar{f}(x,t,u,v)\right|<\delta$, $\left|h(x,t,u,v)-\bar{h}(x,t,u,v)\right|<\delta$, то в области Π будут выполнены неравенства:

$|U(x,t)-\bar{U}(x,t)|<\varepsilon, \quad |V(x,t)-\bar{V}(x,t)|<\varepsilon.$

Литература:

1. Ходжкин А. Нервный импульс.- М.:Мир, I965.- I25 с.

2. Чайлахян Л.М. Электрическая структура возбуждаемых тканей и механизм проведения нервного импульса.// Биофизика.- I962.- Т.7 N5.- С.639-651.

3. Lamberto L. Solutions to the Hodgkin-Huxley Equations.// Trans. Amer. Math. and Comput. 1986. V.18.P.431-469.

4. NobleD. Cardiac action and pacemaker potential based on the Hodgkin-Huxley equations.// Natur.1960. P.188-495.

5. СедовВ.Н, ФохтА.С. Корректность задачи Фитьцю.// Дифференциальные уравнения.- I980.- Т.Т6. N 6.- С.III4-II2I.

6. Боднар И.В., Фохт А.С., Елисеев В.И. // Дифференциальные уравнения.-1986.- Т.22, №3.- С. 446-452.

7. Давлатов А. О первой краевой задаче для системы уравнений типа Ходжкина-Хаксли.// Доклады АН УзССР.- I988.- N9.- С.6-9.

Андижон қишлоқ хўжалик институти,
2015 йил 12 мартда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)