ПОЛУЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ НЕХАРИ И ПОКОРНОГО С ВВЕДЕНИЕМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Г.М.Муминов, Г.И.Холмирзаева

Функция ва унинг биринчи тартибли ҳосиласи иштирок этган Нехари ва Покорнийнинг биринчи тартибли интеграл тенгсизликларини ҳосил килиш учун ёрдамчи функция киритиш усули қўлланган.

Калит сўзлар. *Нехари ва Покорнийнинг биринчи тартибли интеграл тенгсизликлари, ёрдамчи функция киритиш усули.*

Для получения интегральных неравенств Нехари и Покорного первого порядка, зависящих от функций и их производных, применен метод вспомогательных функций.

Ключевые слова: *интегральные неравенства Нехари и Покорного первого порядка, метод вспомогательных функций.*

In this article in order to receive an integral inequality of Nehari and Pokorniy of the first order the method of auxiliary functions is used

Key words: *an integral inequality, the first order method of Nehari and Pokorniy, the uniform method.*

В работах [1-4] для получения интегральных неравенств, зависящих от функции и их производных различных порядков, применялся метод введения вспомогательных функций. В настоящей работе мы опишем этот метод для интегрального неравенства первого порядка и в качестве примера получим интегральные неравенства З.Нехари [5] и В.В.Покорного[6].

Обозначим через $AC(I)$ класс произвольных абсолютно непрерывных функций в интервале $I=(\alpha,\beta),\ -\infty\le\alpha<\beta\le+\infty$, а через $AC'(I)$ обозначим функцию $f\in AC(I)$, удовлетворяющую условию $f'\in AC(I)$. Пусть $\phi\in AC^1(I)$ – положительная функция, заданная в интервале I. Для заданной положительной весовой функции r и вспомогательной функции ϕ определим весовую функцию s с помощью равенства

$$s=-(r\phi')'\phi^{-1} \tag{1}$$

Пусть H класс функций $h\in AC(I)$, удовлетворяющий интегральному

$$\int_I h'^2dt<\infty,\ \int_I sh^2dt>-\infty \tag{2}$$

и терминальному

$$\liminf_{t\to\alpha}(r\phi'\phi^{-1}h^2)<\infty,\ \limsup_{t\to\beta}(r\phi'\phi^{-1}h^2)>-\infty \tag{3}$$

ограничению, где

$$\liminf_{t\to\alpha}(r\phi'\phi^{-1}h^2)\le\limsup_{t\to\beta}(r\phi'\phi^{-1}h^2).$$

Теорема. Для каждой функции $h\in H$ имеет место неравенство

$$\int_I rh'^2dt\ge\int_I sh^2dt\ , \tag{4}$$

при этом знак равенства достигается для функции вида $h=C\phi, C=const.$

Доказательство. Пусть $h\in AC(I)$, то, в силу сделанных выше предположений $r\phi'\phi^{-1}h^2\in AC(I)$. Теперь с помощью обозначения $h=\phi f$ преобразуем выражение rh'^2:

$$rh'^2=r(\phi f)'^2=r(\phi' f+\phi f')^2=r\phi'(\phi' f^2+\phi(f^2)')+r\phi^2f'^2=$$
$$=r\phi'(\phi f^2)'+r\phi^2(\phi^{-1}f)'^2=-(r\phi')'\phi f^2+(r\phi'\phi f^2)'+r\phi^2(\phi^{-1}h)'^2=\text{т.е.}$$
$$=sh^2+(r\phi'\phi^{-1}h^2)'+r\phi^2(\phi^{-1}h)'^2,$$

$$rh'^2=sh^2+(r\phi'\phi^{-1}h^2)'+r\phi^2(\phi^{-1}h)'^2. \tag{5}$$

Поскольку $h \in H$, то равенство (5) выполнено почти всюду в интервале I. Причем в силу (2) и (3) выражение rh'^2 положительно и суммируемо в интервале I. Отсюда следует, что каждая из функций sh^2 и $r\phi'\phi^{-1}h^2$ суммируема в произвольном отрезке $[a,b] \subset I$. Дополнительно, функция $g = r\phi^2(\phi^{-1}h)'^2$ также суммируема в отрезке $[a,b] \subset I$.

Интегрируя равенство (5) по отрезку $[a,b]$, получим, что

$$\int_a^b rh'^2 dt = \int_a^b sh^2 dt + r\phi'\phi^{-1}h^2\Big|_a^b + \int_a^b g dt \,, \qquad (6)$$

где $\alpha < a < b < \beta$.

Кроме того существуют две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha < a_n < b_n < \beta \,,\ a_n \to \alpha,\ b_n \to \beta \qquad (7)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} r\phi'\phi^{-1}h^2\Big|_{a_n} < \infty \,, \quad \lim_{n\to\infty} r\phi'\phi^{-1}h^2\Big|_{b_n} > -\infty \qquad (8)$$

Поэтому существует постоянная $\tilde{N}$, удовлетворяющая следующему ограничению:

$$-r\phi'\phi^{-1}h^2\Big|_{a_n}^{b_n} \le C < \infty$$

Так как почти во всех точках отрезка I соблюдается неравенство $g \ge 0$, то из (6) следует, что

$$\int_{a_n}^{b_n} sh^2 dt + C \le \int_{a_n}^{b_n} rh'^2 dt + C \le \int_I rh'^2 dt + C$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$ имеем

$$\int_I sh^2 dt \le \int_I rh'^2 dt + C < \infty \,,$$

что означает суммируемость функции sh^2 на отрезке I.

Теперь, переходя к пределу при $a \to \alpha, b \to \beta$ в (8), получим равенство

$$\int_I rh'^2 dt - \int_I sh^2 dt = \lim_{t\to\beta}(r\phi'\phi^{-1}h^2) - \lim_{t\to\alpha}(r\phi'\phi^{-1}h^2) + \int_I g dt$$

Но, с учетом того, что $g \ge 0$ в (8), из последнего равенства следует, что

$$\int_I rh'^2 dt \ge \int_I sh^2 dt \,, \qquad (9)$$

причем знак равенства в неравенстве (9) достигается при условиях

$$\lim_{t\to\beta} r\phi'\phi^{-1}h^2 = \lim_{t\to\alpha} r\phi'\phi^{-1}h^2 \quad u \quad \int_I g dt = 0.$$

В силу $g \ge 0$ можно считать, что $g = 0$ почти всюду на I.

Следовательно, $r\phi^2(\phi^{-1}h)'^2 = 0$, т.е. $(\phi^{-1}h)'^2 = 0$. Отсюда $\phi^{-1}h = const$, т.е. $h = C\phi$. Теорема доказана.

Теперь, используя доказанную теорему, приведем примеры, вытекающие из неравенства (4).

Пусть $r = (1-t^{2m})^{\alpha}$, $\phi = (1-t^{2m})^{\beta}$, $m \in N$. Тогда, в силу (1) последовательно находим

$$\phi' = -2m\beta \cdot t^{2m-1} \cdot \left(1-t^{2m}\right)^{\beta-1} \text{ и } r\phi' = -2m\beta \cdot t^{2m-1} \cdot \left(1-t^{2m}\right)^{\alpha+\beta-1}.$$

Отсюда, после дифференцирования получим

$$\left(r\phi'\right)' = -2m\left(2m-1\right)\beta \cdot t^{2m-2} \cdot \left(1-t^{2m}\right)^{\alpha+\beta-1} + 4m^2\beta\left(\alpha+\beta-1\right)t^{4m-2}\left(1-t^{2m}\right)^{\alpha+\beta-2}$$

или

$$\left(r\phi'\right)'\phi^{-1} = 2m\beta \cdot t^{2m-2}\left(1-t^{2m}\right)^{\alpha-2}\left[2m\left(\alpha+\beta-1\right)t^{2m} - \left(2m-1\right)\left(1-t^{2m}\right)\right].$$

Теперь, преобразуя это выражение к виду

$$(r\phi')'\phi^{-1} = 2m\beta t^{2m-2}(1-t^{2m})^{\alpha-1} + 4m^2\left(1-\alpha-\beta\right)t^{2m-2}\left(1-t^{2m}\right)^{\alpha-2},$$

находим, что

$$s=-\left(r\phi'\right)'\phi^{-1}=2m\beta t^{2m-2}\left(2m\alpha+2m\beta-1\right)t^{2m-2}\left(1-t^{2m}\right)^{\alpha-1}+$$
$$+4m^2\left(1-\alpha-\beta\right)t^{2m-2}\left(1-t^{2m}\right)^{\alpha-2} \qquad (10)$$

Теперь рассмотрим следующие случаи:

а) если $2m\alpha+2m\beta-1=0$, то из (10) с учетом (4) можно описать интегральное неравенство

$$\int_{-1}^{1}(1-t^{2m})^{\alpha}h'^2dt\geq 2m(2m-1)\int_{-1}^{1}\frac{t^{2m-2}h^2}{(1-t^{2m})^{2-\alpha}}dt \qquad (11)$$

Если в (11) положим $\alpha=0,\ m=1$, то получим неравенство Нехари, который утверждал, что, если функция $h\in C^1\left[-1,1\right]$ удовлетворяет краевым условиям $h\left(\pm1\right)=0$, то

$$\int_{-1}^{1}h'^2dt\geq\int_{-1}^{1}\frac{h^2}{(1-t^2)^2}dt; \qquad (12)$$

б) если $\alpha+\beta=1$, то из (10) с учетом (4) можно описать интегральное неравенство

$$\int_{-1}^{1}(1-t^{2m})^{\alpha}h'^2dt\geq 2m(2m-1)\int_{-1}^{1}\frac{t^{2m-2}dt}{(1-t^{2m})^{1-\alpha}}. \qquad (13)$$

Если в (13) положим $\alpha=0,\ m=1$, то получим неравенство В.В.Покорного, который утверждал, что, если функция $h\in C^1\left[-1,1\right]$ удовлетворяет краевым условиям $h\left(\pm1\right)=0$, то

$$\int_{-1}^{1}h'^2dt\geq 2\int_{-1}^{1}\frac{h^2}{1-t^2}dt. \qquad (14)$$

Замечание. Неравенства (12) и (14) использованы соответственно в [5] и [6] для исследования неколеблемости решений дифференциальных уравнений второго порядка $\omega''+p(z)\omega=0$ в единичном круге $|z|<1$ комплексной плоскости.

Литература:

1. Florkiewitz B., Some integral inequalities of Hardy type, Colloq. Math., 1980, no.43, p.321-330.

2. Florkiewitz B., Rybarsky A. Some integral inequalities of Sturm-Lioville type. Colloq. Math., 1976, no.36, p.127-141.

3. Florkiewitz B.,Wojteczek K., Some second order integral inequalities of generalized Hardy type, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, sec.A,1999, no.A129, p.947-958.

4. Muminov G.M.,On someWirtinger-Beesack Integral Inequalities. Electronic Journal of Differential Equations, 2005, no.98.p.1-7.

5. Nehari Z. The Schwarzian derivative and schlicht functions. //Bull. Amer. Math.Soc. 55(1949). No 6. pp. 545-551

6. Покорный В.В. О некоторых достаточных условиях однолистности // Докл. АН СССР.-1951.-Т 79, №5.- С.743-746.

Андижон давлат университети,
2016 йил 16 сентябрда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.-м.ф.д. Ф.Арзиқулова)