JUFT VA TOQ FUNKSIYALAR XUSUSIDA

A.TOHIROV G.ARSLONOVA A.AHMADJONOV

В данной работе предлагается нестандартное определение четности и нечетности функций.
In the given work is offered non-standard definition of parity oddness of functions.

Ma'lumki, funksiya tushunchasi matematik tahlilning asosiy tushunchalaridan biridir. Shunga ko'ra, funksiyalarni o'rganishda (tekshirishda) ularni tasniflash funksiyalarning muhim xossalari orqali amalga oshirilishini nazarda tutadigan bo'lsak, bu ish bizga funksiyalarni yanada chuqurroq o'rganish imkonini beradi va, qolaversa, ayrim hollarda funksiyani tekshirish uchun sarflanadigan vaqtni kamaytiradi. Bu holatni biz funksiyalarning muhim bir sinfini tashkil qiluvchi juft va toq funksiyalar sinfida kuzatishimiz mumkin. Bu sinfga kirgan funksiyalar uchun muhim shart, avvalo, funksiyaning aniqlanish sohasini koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikligi bo'lsa, ikkinchi shart funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan simmetrik nuqtalardagi qiymatlari orasidagi munosabatdir. Endi juft va toq funksiyalarning "geometrik" va "analitik" ta'riflarini eslatib o'taylik.

Juft funksiyaning geometrik ta'rifi	Grafigi ordinta o'qiga nibatan simmetrik bo'lgan funksiyani juft funksiya deyiladi.
Juft funkiyaning analitik ta'rifi	Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ihtiyoriy x uchun $$f(-x)=f(x) \qquad (1)$$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyani juft funksiya deyiladi.
Toq funksiyaning geometrik tarifi	Grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan funksiyani toq funksiya deyiladi.
Toq funksiyaning analitik ta'rifi	Agar $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ihtiyoriy x uchun $$f(-x)=-f(x) \qquad (2)$$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyani toq funksiya deyiladi.

Funksiyalarning juft va toq sinfini ajratib oliishdan asosiy maqsad shuki, bunday sinfga kirgan funksiyalar tekshirilayotganda ularni aniqlanish sohasining barcha nuqtalarida emas, balki, masalan, musbat sonlardan tashkil topgan qismida o'rganish kifoyaligidir. Funksiyaning qolgan nuqtalardagi xossalarini esa juft va toq funksiylarning geometrik ta'rifi asosida o'rganilgan qismdagi xossalaridan foydalanib osongina aniqlay olamiz.

Juft va toq funksiyalarning yuqorida keltirilgan geometrik va analitik ta'riflarining teng kuchliligini ko'rsataylik. Masalan, $y=f(x)$ funksiyaning analitik ta'rifiga ko'ra u juft hamda $(x, f(x))$ nuqta funksiyaning grafigida yotadi deb olsak, juft funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikligiga ko'ra $-x$ ham funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lib, natijada $(-x, f(-x))=(-x, f(x))$ nuqta ham $y=f(x)$ funksiya grafigida yotadi. Demak, har bir $(x, f(x))$ nuqta bilan bir vaqtda grafikda $(-x, f(x))$ nuqta ham yotar ekan. Olingan $(x, f(x))$ nuqta hamda aniqlangan $(-x, f(x))$ nuqtalar ordinata o'qiga nisbatan simmetrik nuqtalardir. Bu esa geometrik ta'rifga ko'ra funksiyaning juftligidir. Aksinchasini ham osongina isbot qilish mumkin.

Amalda funksiya asosan analitik usulda berilgani uchun, uni juft yoki toqligini tekshirish analitik ta'riflarda qaralgan (1) yoki (2) tenglikni tekshirishdan iboratdir. Funksiyaning juft ham, toq ham emasligini tekshirishda esa (1) va (2) tengliklar x ning olishi mumkin bo'lgan qiymatlarning aqalli bittasida to'g'ri sonli tenglikka aylanmasligi ko'rsatiladi, aniqrog'i x ning (1) va (2) tengliklarni noto'g'ri sonli tengliklarga aylantiradigan qiymatlari topiladi. Umuman olganda, x ning aynan shunday qiymatlarini topish oson bo'lmasligi mumkin. Bugina emas,

hattoki funksiya juft yoki toq funksiya bo‘lganida ham $f(-x)$ ni hisoblasak, uni $f(x)$ ga yoki $-f(x)$ ga tengligini *“darrov”* ko‘rolmasligimiz mumkin. Bu esa $f(x)$ ning ifodasida ayniy almashtirishlar bajarish kerakligini bildiradi. Masalan,

$$g(x)=x^3+x$$

funksiyani olsak, uning uchun

$$g(-x)=(-x)^3+(-x)=-(x^3+x)=-g(x)$$

bo‘lib, toq funksiyaning analitik ta’rifiga darrov keldik. Ammo

$$h(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

funksiyani olsak, uning uchun

$$h(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

bo‘lib, hattoki $h(x)$ toq funksiya bo‘lishiga qaramasdan

$$h(-x)=-h(x)$$

tenglik *“darrov”* ko‘rinayotgani yo‘q. Agar barcha x larda $x+\sqrt{1+x^2}>0$ ekanligini hisobga olsak va $h(-x)$ ning ifodasida ayniy almashtirishlar bajarsak,

$$h(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x+\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=\ln\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=-h(x)$$

ya’ni kutilayotgan natijaga kelamiz.

Juft va toq funksiyalarning ayrim muhim xossalari.

Juft funksiyalar uchun:

1. Juft funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.
2. Agarda $f(x)$ juft bo‘lib, $f(0)$ aniqlangan bo‘lsa, u holda $f(0)$ istalgan son bo‘lishi mumkin.
3. $f(x)$ juft funksiya bo‘lishi uchun uning aniqlanish sohasidan olingan istalgan x da

$$f(-x)-f(x)\equiv 0$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir.

4. Agarda $f(x)$ juft funksiya bo‘lsa, u holda $f'(x)$ toq funksiya bo‘ladi.
5. $f(x)$ juft funksiya bo‘lganida, uning aniqlanish sohasiga tegishli $[-a,a]$ kesma uchun
6.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

bo‘ladi.

Toq funksiyalar uchun :

1. Toq funksiyaning aniqlanish sohasi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi.
2. Agarda $f(x)$ toq funksiya bo‘lib, $f(0)$ aniqlangan bo‘lsa, u holda $f(0)=0$ bo‘ladi.

3. $f(x)$ toq funksiya bo‘lishi uchun uning aniqlanish sohasidan olingan istalgan x da

$$f(-x)+f(x)\equiv 0$$

bo‘lishi zarur va yetarlidir.

4. Agarda $f(x)$ toq funksiya bo‘lsa, u holda $f'(x)$ juft funnksiya bo‘ladi.

5. $f(x)$ toq funksiya bo‘lganida uning aniqlanish sohasiga tegishli $[-a,a]$ kesma uchun

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan xossalarni ifodalashda biz ularda qatnashayotgan hosila va integrallarni mavjud deb hisobladik. Juft va toq funksiyalar uchun o‘rinli bo‘lgan yuqoridagi xossalarning dastlabki uchtasi ularning ta’riflaridan kelib chiqadi. Shu sababli to‘rtinchi va beshinchi xossalarni isbotlash kifoyadir. Isbotlashni juft funksiya uchun bajaraylik.

4-xossaning isboti. Hosilaning ta’rifiga asosan

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

bo‘lib, $f(x)$ juft funksiya bo‘lganida,

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{-h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-f'(x)$$

tenglikka kelamiz. Shuni isbotlamoqchi edik.

5-xossaning isboti. Aniq integral xossalariga ko‘ra

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

bo‘lib, o‘ng tomondagi birinchi integralda $x=-t$ almashtirishni bajarib

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)d(-t)=-\int_{a}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{a} f(t)dt=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

va bu aniqlanganni yuqoridagi tenglikka qo‘yish bilan kerakli natijani olamiz.

Bu xossalarning uchinchisidan foydalanib funksiyaning juft ham, toq ham emasligini isbotlashda $f(-x)-f(x)$ ayirmani yoki $f(-x)+f(x)$ yig‘indini x ning barcha qiymatlarida aynan nolga teng emasligi, ya’ni natija x ga bo‘g‘liqligi ko‘rsatiladi.

Misollar.

1.Yuqorida ko‘rilgan

$$h(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

funksiyaning toqligini toq funksiyaning uchinchi xossasiga ko‘ra isbotlaylik.

U holda

$$h(-x)+h(x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=$$
$$=\ln\left(\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)=\ln\left(1+x^2-x^2\right)=\ln 1=0$$

Ya'ni $h(-x)+h(x)$ yig'indi x ning ixtiyoriy qiymatida aynan nolga teng bo'lgani uchun $h(x)$ funksiya toq funksiyadir.

2.Ushbu

$$f(x)=x^2-x+1$$

funksiyaning juft yoki toqligini aniqlang.

Bu funksiya toq emas, chunki

$$f(0)=1\neq 0$$

(toq funksiyaning ikkinchi xossasi bajarilmaydi) va

$$f(-x)-f(x)=(x^2+x+1)-(x^2-x+1)=2x,$$

ya'ni $f(-x)-f(x)$ ayirma x ga bog'liq bo'lib aynan nolga teng bo'lmagani uchun juft funksiyaning uchinchi xossaga ko'ra $f(x)$ funksiya juft emas.

3.Ushbu

$$f(x)=\frac{x+2}{3-x},\ h(x)=\frac{x^2+x-1}{x+4}$$

funksiyalarning juft ham, toq ham emasligini ko'rsating.

Bu funksiyalarning aniqlanish sohalari koordintalar boshiga nisbtan simmetrik emasligi sababli juft va toq funksiyalarning birinchi xossasi bajarilmaydi va, demak, ular juft ham, toq ham emas.

4.Ushbu

$$f(x)=\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x},\ g(x)=|x|+x^3,\ h(x)=\sqrt[3]{x-1}$$

funksiyalarning juft yoki toqligini aniqlang.

Hisoblsak,

$$f(-x)=-\frac{3}{x^3}-\sqrt[3]{x},\ g(-x)=|x|-x^3,\ h(-x)=-\sqrt[3]{x+1}$$

bo'ladi. U holda

$$f(-x)+f(x)=-\frac{3}{x^3}-\sqrt[3]{x}+\left(\frac{3}{x^3}+\sqrt[3]{x}\right)\equiv 0$$

bo'lgani uchun $f(x)$ toq funksiyadir.

So'ngra

$$g(-x)-g(x)=-2x^3,$$
$$g(-x)+g(x)=2|x|$$

yani $g(x)$ uchun tuzilgan mos ayirma hamda yig'indi aynan nolga teng bo'lmagani sababli $g(x)$ funksiya juft ham, toq ham emas.

Nihoyat,

$$h(0)=-1\neq 0,$$
$$h(-x)-h(x)=-\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$$

bo'lgani uchun $h(x)$ funksiya toq ham emas, juft ham emas.

5.Agarda

$$\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2б^2}}dx=1$$

bo‘lsa, u holda

$$\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2б^2}}dx$$

integralni hisoblang.

Hisoblasak,

$$\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2б^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}\left(a+\left(x-a\right)\right)e^{-\frac{(x-a)^2}{2б^2}}dx=$$
$$=a\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2б^2}}dx+\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-a\right)e^{-\frac{(x-a)^2}{2б^2}}dx=$$
$$=a+\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-a\right)e^{-\frac{(x-a)^2}{2б^2}}dx$$

bo‘lib, ohirgi integralda $x-a=t$ almashtirishni bajarsak,

$$\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-a\right)e^{-\frac{(x-a)^2}{2б^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2б^2}}dt$$

bo‘ladi. Ammo $f\left(t\right)=te^{-\frac{t^2}{2б^2}}$ funksiya toqligi sababli toq funnksiyaning beshinchi xossasiga ko‘ra ohirgi integral nolga teng. Demak,

$$\frac{1}{\sqrt{2л}б}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2б^2}}dx=a\,.$$

To‘rtinchi va beshinchi xossalar funksiyalarni mos sinflarga kirishining zaruriy sharti bo‘lib, aslo yetarli shartlar emas.

6.Ushbu

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x}+1$$

funksiyani qarasak, uning uchun

$$f'\left(x\right)=-\frac{1}{x^2}$$

bo‘lib, $f'\left(x\right)$ juft funksiya, ammo $f\left(x\right)$ esa

$$f\left(-x\right)+f\left(x\right)=-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{x}+1=2$$

ya’ni toq funsiyaning 3- xossasi bajarilmagani sababli toq funksiya emas.

7.Ushbu

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{10}{9}x, & -3\le x<0,\\ \dfrac{5}{9}x^2, & 0\le x\le 3\end{cases}$$

funksiya juft emasligini, ammo

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = 2\int_{0}^{3} f(x)dx$$

tenglik to‘g‘riligini ko‘rsating.

Haqiqatan bu funksiyaning juft emasligi grafigining $[-3,0)$ dagi qismi to‘g‘ri chiziq kesmasi va $[0,3]$ dagi qismi esa parabola bo‘lagi ekanidan kelib chiqadi. So‘ngra

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{0}\left(-\frac{10}{9}x\right)dx + \int_{0}^{3}\frac{5}{9}x^2dx = 10\ ,$$

$$2\int_{0}^{3} f(x)dx = 2\int_{0}^{3}\frac{5}{9}x^2dx = 10$$

bo‘lgani uchun masalaning ikkinchi qismi ham ko‘rsatildi.

Andijon Davlat Universiteti
2011 yil 25 iyulda qabul qilingan
(Taqrizchi: f.-m.f.d. V.Mullajonov)