ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ

В.Г.МИЛАДЖОНОВ, Р.В. МУЛЛАЖОНОВ

Ушбу мақолада чизиқсиз бошқарилувчи системалар турғунлиги масаласи кўрилган бўлиб, Лурье типидаги системалар абсолют асимптотик турғунлигининг шартлари ҳосил қилинган.

The objective of this article is to consider absolute asymptotic stability of a class of Lure's systems. Conditions for absolute stability are derived via a new approach for stability analysis.

Введение.

Системы автоматического регулирования являются предметом постоянного внимания инженеров, механиков и исследователей в связи с их многими приложениями. Проблема устойчивости таких систем представляет интерес как в теоретическом, так и прикладном аспектах (см. [1-3] и библиографию там). В данной работе изучается задача абсолютной устойчивости нулевого состояния равновесия нелинейной системы непрямого регулирования типа Лурье с использованием строго положительных неопределенных функций (см. [4]). При этом условия устойчивости состояния равновесия регулируемой системы получены на основе анализа устойчивости некоторых линейных вспомогательных систем.

1. **Постановка задачи.** Рассматривается система непрямого регулирования в форме

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + b\sigma + cf(\sigma), \\ \frac{d\sigma}{dt} &= d^T x + r\sigma + qf(\sigma), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$ - вектор состояния системы в момент $t \in R_+$, $A - n \times n$ -постоянная матрица параметров регулируемой системы, b, c, r, q -параметры регулирующего органа, $(b, c, d,) \in \mathrm{R}^n \times R^n \times \mathrm{R}^n$, r, q - скалярные постоянные; $f(\sigma)$ -заданная нелинейная функция аргумента σ. Предполагается, что функция $f(\sigma)$ принадлежит и классу непрерывных функций, со свойствами:

$$f(0) = 0, \text{ и } 0 \le f(\sigma)\sigma \le k\sigma^2, \qquad (*)$$

или

$$0 \le \frac{f(\sigma)}{\sigma} \le k, \quad k \in R_+ \text{ при } \sigma \ne 0. \quad (2)$$

Кроме того, предполагается, что для системы (1) выполняются условия существования и существенности решений для всех $t \ge 0$ при любых начальных условиях $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in R_+$, $\sigma(t_0) = \sigma_0 \in R$.

Из условия (2) следует, что скалярная функция $\varphi(\sigma) = \frac{f(\sigma)}{\sigma} + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ является строго положительной с порядком строгости $\varepsilon > 0$, т.е. $\min \varphi(\sigma) = \varepsilon > 0$.

Систему (1) представим в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + (b - c\varepsilon)\sigma + c\varphi(\sigma)\sigma, \\ \dot{\sigma} &= d^T x + (r - q\varepsilon)\sigma + q\varphi(\sigma)\sigma, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\dot{y} = B(\sigma)y, \qquad (3)$$

где $y^T = (x,\sigma) \in R^{n+1}$, $B(\sigma) = \begin{pmatrix} A & b - c\varepsilon + c\varphi(\sigma) \\ d^T & r - q\varepsilon + q\varphi(\sigma) \end{pmatrix}$, $\varphi(\sigma) = \dfrac{f(\sigma)}{\sigma} + \varepsilon.$

Матрицу $B(\sigma)$ представим виде

$$B(\sigma) = \begin{pmatrix} A & b - c\varepsilon \\ d^T & r - q\varepsilon \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & q \end{pmatrix}\varphi(\sigma).$$

И систему (3) перепишем так

$$\dot{y} = B_0 y + \varphi(\sigma)B_1 y, \qquad (4)$$

где $y^T = (x,\sigma) \in R^{n+1}$, $B_0 = \begin{pmatrix} A & b - c\varepsilon \\ d^T & r - q\varepsilon \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & q \end{pmatrix}$,

$$A = (a_{ij}),\ a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1,2,...,n,\ d^T = (d_1, d_2, ..., d_n),\ b^T = (b_1, b_2, ..., b_n),$$
$$c^T = (c_1, c_2, ..., c_n),\ r < 0, q < 0,\ \varepsilon > 0.$$

Целью данной работы является получение достаточных условий абсолютной устойчивости и неустойчивости нулевого решения системы (1).

2. **Метод решения задачи.** С системой (4) будем рассматривать вспомогательную функцию (5) в виде квадратичной формы

$$v(y) = y^T P y, \qquad (5)$$

где $y^T = (x,\sigma) \in R^{n+1}$, P – положительно определенная симметрическая относительно главной диагонали, квадратная матрица $n+1$ - го порядка, которая удовлетворяет оценкам, характерным для квадратичных форм

$$\lambda_m(P)\|y\|^2 \le v(y) \le \lambda_M(P)\|y\|^2. \qquad (6)$$

Здесь $\lambda_m(P), \lambda_M(P)$ – минимальное и максимальное собственные значения матрицы P соответственно.

Для полной производной функции (5) в силу системы (4) получим

$$\left(\dot{v}(y)\right)_{(4)} = \dot{y}^T P y + y^T P \dot{y} = y^T (B_0^T P + P B_0) y + \varphi(\sigma) y^T (B_1^T P + P B_1) y =$$
$$= y^T G_0 y + \varphi(\sigma) y^T G_1 y,$$

где $G_0 = B_0^T P + P B_0$, $G_1 = B_1^T P + P B_1$.

Отсюда получается следующая двусторонняя оценка

$$\left(\lambda_m(G_0) + \varphi(\sigma)\lambda_m(G_1)\right)\|y\|^2 \le \left(\dot{v}(y)\right)_{(4)} \le \left(\lambda_M(G_0) + \varphi(\sigma)\lambda_M(G_1)\right)\|y\|^2. \qquad (7)$$

Если в оценках (7)

1) $\lambda_M(G_1) \le 0$, то

$$\left(\dot{v}(y)\right)_{(4)} \le \left(\lambda_M(G_0) + \varepsilon\lambda_M(G_1)\right)\|y\|^2, \qquad (8)$$

2) $\lambda_m(G_1) \ge 0$, то

$$\left(\lambda_m(G_0)+\varepsilon\lambda_m(G_1)\right)\|y\|^2 \le \left(\dot{v}(y)\right)_{(4)} \qquad (9)$$

3) $\lambda_M(G_0)\le 0$ и $\lambda_M(G_1)>0$, то

$$\left(\dot{v}(y)\right)_{(4)} \le \varphi(\sigma)\left(\varepsilon'\lambda_M(G_0)+\lambda_M(G_1)\right)\|y\|^2, \quad (10)$$

4) $\lambda_m(G_0)\ge 0$ и $\lambda_m(G_1)<0$, то

$$\varphi(\sigma)\left(\varepsilon'\lambda_m(G_0)+\lambda_m(G_1)\right)\|y\|^2 \le \left(\dot{v}(y)\right)_{(4)}, \qquad (11)$$

где ε' - порядок строгости строго положительной функции $\varphi^{-1}(\sigma)=\dfrac{1}{\varphi(\sigma)}$, т.е. $\varepsilon'=\dfrac{1}{k+\varepsilon}$.

Теорема 2.1. Пусть для системы (1) построена функция Ляпунова (5) удовлетворяющая оценкам (6) и $(n+1)\times(n+1)$ матрица P положительно определенная, симметрическая относительно главной диагонали. [6,7]

Тогда состояние равновесия $y=0$ системы (4) (или $x=0,\ \sigma=0$ системы (1))

а) абсолютно устойчиво, если выполняется неравенство

$$\lambda_M(G_0)+\varepsilon\lambda_M(G_1)<0 \qquad (12)$$

или

$$\varepsilon'\lambda_M(G_0)+\lambda_M(G_1)<0 \qquad (13)$$

б) неустойчиво, если выполняется неравенство

$$\lambda_m(G_0)+\varepsilon\lambda_m(G_1)>0 \qquad (14)$$

или

$$\varepsilon'\lambda_m(G_0)+\lambda_m(G_1)>0 \qquad (15)$$

Доказательство. Пусть для системы (1) построена функция Ляпунова, (5) удовлетворяющая оценкам (6). Тогда из положительной определенности матрицы P следует, что функция (5) положительно определенная и $v(0)=0$.

При выполнении условия а) теоремы 2.1 из оценок (8) или (10) следует, что функция $\left(\dot{v}(x)\right)_{(4)}$ - отрицательно определенная;

При выполнение условия б) теоремы 2.1 из оценок (9) или (11) следует, что функция $\left(\dot{v}(x)\right)_{(4)}$ - положительно определенная.

Эти условия, как известно [1,2,5], являются достаточными для абсолютной устойчивости, устойчивости и неустойчивости состояния равновесия $y=0$ системы (4) соответственно.

Примечание 1. Введение строго положительной функции $\varphi(\sigma)$, т.е параметра $\varepsilon>0$ позволяет заменить нелинейную систему (1) системой (4), которая дает возможность определить достаточное условие устойчивости системы с помощью промежуточных подсистем,

$$\dot{y}=B_0(y) \qquad (16)$$

и

$$\dot{y}=B_1(y), \qquad (17)$$

сохранная влиянию нелинейную часть.

Примечание 2. В случае $\varepsilon \to 0$ для получение достаточное условия абсолютной устойчивости или неустойчивости состояние равновесие системы (1) целосообразно применит неравенство (13) или (15) соответственно. В этом случае эти неравенства имеют вид

$$\frac{1}{k}\lambda_M(G_0)+\lambda_M(G_1)<0\ , \qquad (13^/)$$

$$\frac{1}{k}\lambda_m(G_0)+\lambda_m(G_1)>0\,. \qquad (15^/)$$

3. **Приложения.** Рассмотрим систему непрямого регулирования (1) со следующими численными значениями параметров

Пример 1. Пусть в системе (1)

$$A=diag(-1,-2,-3,-4),\quad b^T=d^T=(1,1,1,1),\quad c^T=(0,0,0,0),\quad r=-6,\quad q=-1$$

$$f(\sigma)=\frac{\sigma}{\sigma^{2n}+1}+\sigma,\quad 0\le\sigma f(\sigma)=\frac{\sigma^2}{\sigma^{2n}+1}+\sigma^2\le 2\sigma^2,\ k=2.$$

Функция $\varphi(\sigma)=\dfrac{f(\sigma)}{\sigma}=\dfrac{1}{\sigma^{2n}+1}+1$ является строго положительной с порядком строгости $\varepsilon=1>0$ и система (4) принимает

$$\dot y=B_0y+\varphi(\sigma)B_1y, \qquad (18)$$

где $y^T=(x_1,x_2,x_3,x_4,\sigma),\ \varphi(\sigma)=\dfrac{1}{\sigma^{2n}+1}+1\ge 1>0,$

$$B_0=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&1\\0&-2&0&0&1\\0&0&-3&0&1\\0&0&0&-4&1\\1&1&1&1&-5\end{pmatrix},\qquad B_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

Для системы (18) построим функции Ляпунова в следующем виде

$$v(y)=y^TEy>0,\quad v(0)=0\,. \qquad (19)$$

Для полной производной функции (19) в силу системы (18) получим оценки

$$\big(\dot v(y)\big)_{(18)}=y^T(B_0^T+B_0)y+\varphi(\sigma)y^T(B_1^T+B_1)y\le 2\big(\lambda_M(B_0)+\varphi(\sigma)\lambda_M(B_1)\big)\|y\|^2\,.$$

Как видно, матрица B_1 отрицательно полуопределенная и $\lambda_M(B_1)=0$. Вычислим главные миноры матрицы B_0:

$$\Delta_1=-1\,,\ \Delta_2=2\,,\ \Delta_3=-6\,,\ \Delta_4=24\,,\ \Delta_5=|B_0|=-70\,.$$

Итак, матрица B_0 отрицательно определенная, поэтому $\lambda_M(B_0)<0$ и

$$\big(\dot v(y)\big)_{(18)}\le 2\lambda_M(B_0)\|y\|^2<0,$$

т.е. состояние равновесия системы (18) абсолютно устойчиво.

Пример 2. Рассмотрим систему, описывающую продольное движение самолета, в канонических переменных [5].

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= -\rho_i x_i + \sigma, \\ \dot{\sigma} &= \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i + r p_2 \sigma - f(\sigma), \quad i = 1,2,3,4, \end{aligned} \tag{20}$$

где вещественные постоянные $\rho_i > 0, i = 1,2,3,4,\ r > 0,\ p_2 < 0,\ \sigma f(\sigma) > 0$ или $\dfrac{f(\sigma)}{\sigma} > 0$,

$\rho = \min(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$

Введем строго положительную функцию

$$\varphi(\sigma) = \frac{f(\sigma)}{\sigma} + \varepsilon,$$

где ε - достаточно малое положительное число, т.е. $\varepsilon \to 0$. Тогда систему (20) представим в следующим виде

$$\dot{y} = B_0 y + \varphi(\sigma) B_1 y, \tag{21}$$

где $y^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, \sigma),\quad \varphi(\sigma) = \dfrac{f(\sigma)}{\sigma} + \varepsilon,\ \varepsilon \to 0,$

$$B_0 = \begin{pmatrix} -\rho_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\rho_2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\rho_3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_4 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & r p_2 + \varepsilon \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Установим оценку области значений параметров, для которых состояние равновесия $y = 0$ ($x = 0,\ \sigma = 0$) системы (21) асимптотически устойчиво в целом. Для этого построим функцию Ляпунова вида (5) с матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

где $\alpha = |\beta|^{-1},\ |\beta| = \max(|\beta_1|, |\beta_2|, |\beta_3|, |\beta_4|).$

Как и в примере 1 $\lambda_M(B_0) = 0$; вычислим главные миноры матрицы $B_0^T P + P B_0$:

$\Delta_1 = -2\rho_1 < 0,\quad \Delta_2 = 4\rho_1\rho_2 > 0,\quad \Delta_3 = -8\rho_1\rho_2\rho_3 < 0,\quad \Delta_4 = 16\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 > 0,$

$$\Delta_5 = \left|B_0^T P + PB_0\right| = 64\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2\rho_4 (rp_2 + \varepsilon + \sum_{i=1}^{4} \frac{(1+\alpha\beta_i)^2}{4\rho_i\alpha})$$

Отсюда следует, что если $\Delta_5 < 0$, то $\lambda_M (B_0^T P + PB_0) < 0$ или $\left(\dot{v}(y)\right)_{(21)} < 0$, т.е. функция $\left(\dot{v}(y)\right)_{(21)}$ отрицательно определенная и состояние равновесия $y = 0$ системы (21) асимптотически устойчиво при условии

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{(1+\alpha\beta_i)^2}{4\rho_i\alpha} < |p_2| r - \varepsilon . \qquad (22)$$

Если учесть, что $\varepsilon \to 0$, то условие (22) можно заменить следующим

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{(1+\alpha\beta_i)^2}{4\rho_i\alpha} < |p_2| r \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{4} \frac{\left(1+\frac{\beta_i}{|\beta|}\right)^2 |\beta|}{4\rho_i} \le |p_2| r . \qquad (23)$$

Так, как $0 \le 1 + \frac{\beta_i}{|\beta|} \le 2$ или $0 \le \left(1+\frac{\beta_i}{|\beta|}\right)^2 \le 4$, поэтому имеем

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\left(1+\frac{\beta_i}{|\beta|}\right)^2 |\beta|}{4\rho_i} \le |\beta| \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\rho_i} . \qquad (24)$$

Учитывая неравенство (24) получим достаточное условие абсолютной устойчивости состояния равновесия $y = 0$ системы (20) в следующем виде

$$|\beta| \le |p_2| r \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{\rho_i} \right)^{-1} , \qquad (25)$$

где $|\beta| = \max(|\beta_1|, |\beta_2|, |\beta_3|, |\beta_4|)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. - М.: Изд-во АН СССР. 1963.-138 с.

2. Груйич Л.Т, Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – Киев: Наукова Думка, 1984. -307 с.

3. Летов А.М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем.- М., 1962.-483 с.

4. Матросов В.М, Метод векторных функций Ляпунова: Анализ динамических свойств нелинейных систем.- М.: Физматлит, 2001. - 380с.

5. Миладжонов В.Г., Муллажонов Р.В. Об одном методе анализа устойчивости линейных крупномасштабных систем.// Проблемы механики.- Т.: Фан, 2009.- № 2-3.- С 28-30.

6. Муллажонов Р.В, Обобщенное транспонирование матриц и структуры линейных крупномасштабных систем // Доп. НАН України.-2009.- № 11.- С.27

Андижон давлат университети
2011 йил 15 июнда қабул қилинган