ЛУРЬЕ ТИПИДАГИ СИНГУЛЯР-ТОЙИГАН СИСТЕМАЛАРНИНГ АБСОЛЮТ ТУРҒУНЛИГИ ВА ЛЯПУНОВНИНГ МАТРИЦА-ФУНКЦИЯСИ

В.Ғ.Миладжонов, К.В.Муллажонов, Э.Ғаниев

В данной работе с помощью прямого метода Ляпунова, основанного на матричнозначной функции, получено достаточное условие абсолютной устойчивости сингулярно-возмущенной системы типа системы Лурье.

In the given job with the help of a direct method Lyapunov, based on matrix - function, the sufficient condition of absolute stability of the singular-indignant system such as system Lure is received.

Сингуляр-тойиган системалар назарияси Ляпуновнинг тўғри усули ёрдамида, скаляр ва вектор функцияларни қўллаган ҳолда кенг ривожлантирилган. Аммо Ляпуновнинг матрица-функция асосидаги тўғри усули сингуляр-тойиган системаларга умумий кўринишда татбиқ қилинган бўлиб, бунинг натижасида турғунликнинг янги шартлари ҳосил қилинган.

Ушбу иш Ляпуновнинг матрица-функциясига асосланган тўғри усули ёрдамида Лурье системаси типидаги сингуляр-тойиган системаларнинг абсолют турғунлигини ўрганишга бағишланган бўлиб, турғунликнинг етарли шартлари махсус матрицаларнинг ишоралари билан ифодаланади. Бошқача айтганда, Лурье системаси кўринишидаги сингуляр-тойиган системаларининг текис асимптотик турғунлиги Ляпунов матрица-функцияси асосида таҳлил қилинади. Лурье системаси кўринишидаги сингуляр-тойиган системалар абсолют турғунлигининг етарли шартлари ҳосил қилиниб, етарли кичик параметрнинг ўзгариш чегаралари кўрсатилган.

1. Лурье системаси кўринишидаги автоном сингуляр-тойиган системани олиб қарайлик [1]

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + q_1 f_1(\sigma_1),\ \ \sigma_1 = c_{11}^T x + c_{12}^T y, \qquad (1)$$

$$\mu\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + q_2 f_2(\sigma_2),\ \ \sigma_2 = c_{21}^T x + c_{22}^T y, \qquad (2)$$

бу ерда $x \in N_x \subseteq R^n,\ y \in N_y \subseteq R^m,\ \mu \in]0,1]$ - етарли кичик параметр, $A_{ij},\ i,j = 1,2$ матрицалар ва $c_{ij},\ q_i,\ i,j = 1,2$ векторлар мос ўлчовли. $f_i,\ i = 1,2$ чизиқсиз функциялар узлуксиз, $f_i(0) = 0$ ва $[0,k_i],\ i = 1,2,\ k_i \in]0,+\infty[$ Лурье секторида

$$\frac{f_i(\sigma_i)}{\sigma_i} \in [0,k_i],\ i = 1,2,\ \forall\sigma_i \in]-\infty,+\infty[$$

шартларни қаноатлантиради. Бу ерда шундай f_i чизиқсиз функциялар қараладики, $(x^T, y^T)^T = 0$ ҳолат мос равишда

$$\dot{x} = A_{11}x + q_1 f_1(\sigma_1^0),\ \sigma_1^0 = c_{11}^T x \qquad (3)$$

келтирилган система ва

$$\mu\dot{y} = A_{22}y + q_2 f_2(\sigma_2^0),\ \sigma_2^0 = c_{22}^T x \qquad (4)$$

чегаравий қатламни ифодаловчи системаларнинг ягона мувозанат ҳолати бўлади. Бу [1] га асосан

$$c_{ii}^T A_{ii}^{-1} q_i > 0$$

шартда ўринли бўлади.

Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$f(x,0) = A_{11}x + q_1 f_1(\sigma_1^0),\ \ f^\bullet(x,y) = q_1[f_1(\sigma_1) - f_1(\sigma_1^0)] + A_{12}y,$$
$$g(0,y) = A_{22}y + q_2 f_2(\sigma_2^0),\ \ g^\bullet(x,y) = A_{21}x + q_2[f_2(\sigma_2) - f_2(\sigma_2^0)].$$

У ҳолда (1), (2) система қуйидаги кўринишга келади:

$$\dot{x} = f(x,0) + f^\bullet(x,y)$$
$$\mu\dot{y} = g(0,y) + g^\bullet(x,y).$$

(1), (2) система (3) ва (4) қисм системалар билан бирга қуйидаги матрица функцияни қараймиз [2,3,4]

$$U(x,y,\mu) = \begin{bmatrix} v_{11}(x) & v_{12}(x,y,\mu) \\ v_{12}(x,y,\mu) & v_{22}(y,\mu) \end{bmatrix},\ \ v_{12} = v_{21} \qquad (5)$$

бу ерда $v_{11}(x) = x^T B_1 x,\ v_{22} = \mu y^T B_2 y,\ \ v_{12} = \mu x^T B_3 y$ ва $B_1,\ B_2$ мусбат аниқланган симметрик матрицалар, B_3 ўзгармас матрица. (5) матрица-функция ёрдамида қуйидаги скаляр функцияни киритамиз:

$$v(x,y,\mu) = \eta^T U(x,y,\mu)\eta \qquad (6)$$

бу ерда $\eta^T = (\eta_1,\eta_2) \in R^2,\ \eta_i > 0,\ i = 1,2.$

(5) матрица-функция элементлари квадратик формалар учун характерли бўлган қуйидаги баҳоларни қаноатлантиради деб фараз қиламиз

$$v_{11}(x) \ge \lambda_m(B_1)\|x\|^2,\ \ \forall x \in N_{x0} = \{x : x \in N_x, x \ne 0\},$$
$$v_{22}(y,\mu) \ge \mu\lambda_m(B_2)\|y\|^2,\ \ \forall (y,\mu) \in N_{y0} \times M, \qquad (7)$$
$$v_{12}(x,y,\mu) \ge -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T)\|x\|\|y\|,\ \ \forall (x,y,\mu) \in N_{x0} \times N_{y0} \times M,$$

бу ерда $\lambda_m(B_i) - B_i,\ i = 1,2$ матрицанинг минимал хос қийматлари, $\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) - B_3$ матрицанинг нормаси, $\lambda_M(B_3B_3^T) - B_3B_3^T$ матрицанинг максимал хос қиймати,

$N_{y0} = \{y : y \in N_y, y \ne 0\},\quad M =]0,1].$

(7) баҳолар бажарилганда, (6) функция учун қуйидаги баҳо ўринли бўлади:

$$v(x,y,\mu) \ge u^T H^T A H u,\ \ \forall (x,y,\mu) \in N_x \times N_y \times M \qquad (8)$$

бу ерда

$$u^T = (\|x\|,\|y\|),\ H = diag(\eta_1,\eta_2),\ \ A = \begin{bmatrix} \lambda_m(B_1) & -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) \\ -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) & \mu\lambda_m(B_2) \end{bmatrix}$$

(5) матрица-функция элементларидан (1), (2) система ечими бўйича олинган ҳосилалар учун қуйидаги баҳолар бажарилади:

а) $(D_x v_{11})^T f(x,0) \le \rho_{11}\|x\|^2, \forall x \in N_{x0},$

б) $(D_x v_{11})^T f^*(x,y) \le \rho_{12}\|x\|^2 + 2\rho_{13}\|x\|\|y\|, \forall (x,y) \in N_{x0} \times N_{y0},$

с) $(D_y v_{22})^T g(0,y) \le \rho_{21}\|y\|^2, (y,\mu) \in N_{y0} \times M,$

г) $(D_y v_{22})^T g^*(x,y) \le \rho_{22}\|y\|^2 + \rho_{23}\|x\|\|y\|,\ \ \forall (x,y,\mu) \in N_{x0} \times N_{y0} \times M,$ (9)

д) $(D_x v_{12})^T f(x,0) \le \mu\rho_{15}\|x\|\|y\|,\ \ \forall (x,y,\mu) \in N_{x0} \times N_{y0} \times M,$

е) $(D_x v_{12})^T f^*(x,y) \le \mu\rho_{17}\|x\|\|y\| + \mu\rho_{18}\|y\|^2,\ \ \forall (x,y,\mu) \in N_{x0} \times N_{y0} \times M,$

ж) $(D_y v_{12})^T g(0,y) \le \rho_{25}\|x\|\|y\|,\ \ \forall (x,y,\mu) \in N_{x0} \times N_{y0} \times M,$

з) $(D_y v_{12})^T g^*(x,y) \le \rho_{26}\|x\|^2 + \mu\rho_{27}\|x\|\|y\|,\ \ \forall (x,y,\mu) \in N_{x0} \times N_{y0} \times M,$

бу ерда $\rho_{11}, \rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{22}, \rho_{18}, \rho_{26}$ мос равишда

$B_1 A_{11} + A_{11}^T B_1 + B_1 q_1 k_1^* c_{11}^T + (q_1 k_1^* c_{11}^T)^T B_1 : \ B_1 q_1 k_1^* c_{11}^T + (q_1 k_1^* c_{11}^T) B_1$

$B_2 A_{22} + A_{22}^T B_2 + B_2 q_2 k_2^* c_{22}^T + (q_2 k_2^* c_{22}^T)^T B_2 : \ B_2 q_2 k_2^* c_{22}^T + (q_2 k_2^* c_{22}^T) B_2$

$\frac{1}{2}(B_3^T A_{12} + A_{12}^T B_3) + \frac{1}{2}\{B_3^T q_1 k_1^* c_{12}^T + (q_1 k_1^* c_{12}^T)^T B_3\};$

$\frac{1}{2}(B_3 A_{21} + A_{21}^T B_3^T) + \frac{1}{2}\{B_3 q_2 k_2^* c_{21}^T + (q_2 k_2^* c_{21}^T)^T B_3^T\}$

матрицаларнинг максимал хос қийматлари, $\rho_{13}, \rho_{23}, \rho_{15}, \rho_{17}, \rho_{25}, \rho_{27}$ мос равишда $B_1 A_{12} + B_1 q_1 k_1^* c_{12}^T;\ B_2 A_{21} + B_2 q_2 k_2^* c_{21}^T;\ A_{11}^T B_3 + (q_1 k_1^* c_{11}^T) B_3;\ (q_1 k_1^* c_{11}^T)^T B_3;$

$B_3 A_{22} + B_3 q_2 k_2^* c_{22}^T;\ B_3 q_2 k_2^* c_{22}^T$ матрицаларнинг нормалари,

$$k_i^* = \begin{cases} k_i, \ \sigma_i q_i B_j x > 0 \ \ ёки \ \ \sigma_i q_i B_j y > 0 \\ 0, \ \ \sigma_i q_i B_j x \le 0 \ \ ёки \ \ \sigma_i q_i B_j y \le 0 \end{cases}$$
$$i = 1,2; \ \ j = 1,2,3.$$

(6) функциядан олинган ҳосиланинг юқори чегарасини $\dot{v}_M(x, y, \mu)$ билан белгилаб, қуйидаги баҳони топамиз:

$$\dot{v}_M(x, y, \mu) \le u^T C(\mu) u \qquad (10)$$

бу ерда

$$C(\mu) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}, \ \ \sigma_{12} = \sigma_{21},$$

$\sigma_{11} = \eta_1^2(\rho_{11} + \rho_{12}) + 2\eta_1\eta_2\rho_{26}, \ \ \sigma_{22} = \eta_2^2(\rho_{21} + \rho_{22}) + 2\mu\eta_1\eta_2\rho_{18},$

$\sigma_{12} = \eta_1^2\rho_{13} + \eta_2^2\rho_{23} + \eta_1\eta_2(\mu\rho_{15} + \mu\rho_{17} + \rho_{25} + \rho_{27}).$

Қуйидаги миқдорларни киритамиз:

$$\mu_1 = -\frac{\eta_2(\rho_{21} + \rho_{22})}{2\eta_1\rho_{18}}, \ \ \mu_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ \ \mu_3 = \frac{\lambda_m(B_1)\lambda_m(B_2)}{\lambda_M(B_3 B_3^T)},$$
$$\mu_0 = \min(\mu_1, \mu_2), \quad \mu_0^* = \min(\mu_0, \mu_3)$$

бу ерда

$a = \eta_1^2\eta_2^2(\rho_{15} + \rho_{17})^2; \ b = \eta_1\eta_2(\rho_{15} + \rho_{17})[\eta_1^2\rho_{13} + \eta_2^2\rho_{23} + \eta_1\eta_2(\rho_{25} + \rho_{27})] - 2\eta_1\eta_2\rho_{18}\sigma_{11},$

$c = [\eta_1^2\rho_{13} + \eta_2^2\rho_{23} + \eta_1\eta_2(\rho_{25} + \rho_{27})]^2 - \eta_2^2(\rho_{21} + \rho_{22})\sigma_{11}.$

Агар $\mu_0^* > 1$ бўлса, $\mu \in]0,1]$ деб оламиз.

Лемма. Агар қуйидаги шартлар бажарилса, $C(\mu)$ матрица $\mu \in]0, \mu_0]$ ва $\mu \to 0$ да манфий аниқланган бўлади:

а) $\sigma_{11} < 0$, *б)* $\rho_{21} + \rho_{22} < 0$, *с)* $\rho_{18} > 0$, *г)* $c < 0$

Эслатма. Агар $\rho_{18} \le 0$ бўлиб, леммадаги а), б), г) шартлар бажарилса, у ҳолда лемма $\mu_0 = \mu_2$ да ўз кучида қолади.

Теорема. Лурье системаси кўринишидаги (1), (2) сингуляр-тойиган система учун элементлари (7) баҳоларни қаноатлантирувчи (5) матрица- функция қурилган бўлиб, (6) функциядан олинган ҳосиланинг юқори чегараси учун (10) баҳо ўринли бўлсин.

Агар $\mu \in]0, \mu_0^*]$ ва $\mu \to 0$ да $A(\mu)$ матрица мусбат аниқланган ва $C(\mu)$ матрица манфий аниқланган бўлса, у ҳолда (1), (2) системанинг $(x^T, y^T)^T$ мувозанат ҳолати $\mu \in]0, \mu_0^*]$ ва $\mu \to 0$ да текис асиптотик турғун бўлади.

Агар $N_x \times N_y = R^{n+m}$ бўлса, у ҳолда (1), (2) системанинг $(x^T, y^T)^T = 0$ мувозанат ҳолати $\mu \in]0, \mu_0^*]$ ва $\mu \to 0$ да тўла текис асимптотик турғун бўлади.

2. Мисол. Қуйидаги системани олиб қарайлик:

$$\dot{x} = -ax + \begin{pmatrix} -b\sin\overline{\delta} \\ 0 \end{pmatrix} y \qquad (11)$$

$$\mu\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c\sin\overline{\delta} \end{pmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos\overline{\delta} & -\lambda \end{bmatrix} y \qquad (12)$$

бу ерда $y = (y_1, y_2)^T$, $a,\ b,\ c,\ \lambda,\ \overline{\delta}$ лар ўзгармас катталиклар бўлиб, $0 < \overline{\delta} < \frac{\pi}{4}$.

(11), (12) системанинг $(x^T, y^T)^T = 0$ мувозанат ҳолати асимптотик турғунлигини текшириш юқоридаги теоремага асосан олиб борилади. (11), (12) система учун (5) матрица-функция элементларини қуйидагича танлаймиз:

$$v_{11}(x) = \frac{\overline{\delta}c\cos\overline{\delta} - \sin\overline{\delta}}{b\sin\overline{\delta}} x^2, \quad v_{12}(x, y, \mu) = \mu x(\lambda(\sin\overline{\delta} - \overline{\delta}), \overline{\delta}) y;$$

$$v_{22}(y, \mu) = \mu y^T \begin{bmatrix} \lambda\cos\overline{\delta} + \frac{\lambda}{c} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{c} & \frac{\lambda}{c} \end{bmatrix} y \qquad (13)$$

$\eta^T = (1,1)$ бўлсин, у ҳолда $A(\mu)$ матрицанинг элементлари

$$\underline{\alpha}_{11} = \frac{\overline{\delta}c\cos\overline{\delta} - \sin\overline{\delta}}{b\sin\overline{\delta}}, \quad \underline{\alpha}_{12} = -\sqrt{\lambda^2(\sin\overline{\delta} - \overline{\delta})^2 + \overline{\delta}^2},$$

$$\underline{\alpha}_{22} = \frac{\lambda}{2}(\cos\overline{\delta} + \frac{2}{c}) - \sqrt{(\frac{\lambda\cos\overline{\delta}}{2})^2 + (\frac{1}{c})^2}.$$

бўлиб, $\mu_3 = \frac{\underline{\alpha}_{11}\underline{\alpha}_{22}}{\underline{\alpha}_{12}^2}$ бўлади ва $A(\mu)$ матрица $\lambda \in]0, \mu_3]$ ва $\mu \to 0$ да мусбат аниқланган бўлади.

(5) матрица-функция элементларининг (13) кўринишида танланишида $C(\mu)$ матрицанинг элементлари қуйидагича бўлади:

$$c_{11} = -2\left(a\frac{\overline{\delta}c\cos\overline{\delta} - \sin\overline{\delta}}{b\sin\overline{\delta}} - \overline{\delta}c\sin\overline{\delta}\right), \quad c_{12} = \mu a\sqrt{\lambda^2(\sin\overline{\delta} - \overline{\delta})^2 + \overline{\delta}^2},$$

$$c_{22} = \max(-2\cos\overline{\delta}, -2\frac{\lambda^2 - 1}{c}) + \mu b\lambda\sin\overline{\delta}(\overline{\delta} - \sin\overline{\delta}).$$

Бундан қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$\mu_1 = -\frac{\max(-2\cos\overline{\delta}, -2\frac{\lambda^2 - 1}{c})}{b\lambda\sin\overline{\delta}(\overline{\delta} - \sin\overline{\delta})}, \quad \mu_2 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1},$$

$$\mu_0 = \min(\mu_1, \mu_2)$$

бу ерда

$$a_1 = a^2[\lambda^2(\sin\overline{\delta} - \overline{\delta})^2 + \overline{\delta}^2]; \ b_1 = 2\left(a\frac{\overline{\delta}c\cos\overline{\delta} - \sin\overline{\delta}}{b\sin\overline{\delta}}\right) - \overline{\delta}c\sin\overline{\delta})b\lambda\sin\overline{\delta}(\overline{\delta} - \sin\overline{\delta});$$

$$c_1 = 2\left(a\frac{\overline{\delta}c\cos\overline{\delta} - \sin\overline{\delta}}{b\sin\overline{\delta}} - \overline{\delta}c\sin\overline{\delta}\right)\max(-2\cos\overline{\delta}, -2\frac{\lambda^2 - 1}{c})$$

текшириб кўриш мумкинки, $\mu \in]0, \mu_0]$ ва $\mu \to 0$ да $C(\mu)$ матрица манфий аниқланган бўлади.

Демак, $\mu_0^* = \min(\mu_3, \mu_0)$ деб олсак, $\mu \in]0, \mu_0^*]$ ва $\mu \to 0$ да $A(\mu)$ матрица мусбат аниқланган, $C(\mu)$ матрица манфий аниқланган бўлади.

У ҳолда, юқоридаги теоремага асосан, (11), (12) системанинг мувозанат ҳолати $\mu \in]0, \mu_0^*]$ ва $\mu \to 0$ да текис асимптотик турғун бўлади.

Адабиётлар

1. Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных-возмущениях.-Киев: Наука. Думка, 1984.-307 с.

2. Мартынюк А.А., Миладжонов В.Г. Исследование устойчивости автономных сингулярно-возмущенных систем на основе матриц–функций Ляпунова // Дифференциальные уравнения .-1988.-.№ 3.- С. 103-109

Андижон давлат университети,
2009 йил 10 мартда қабул қилинган