ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

Г.М. Муминов

Maqolada qabariq to`plamning tayanch funksiyasi yordamida ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama yechimining nollari orasidagi masofani baholash masalasi qaralgan.

Kalit so'zlar: *qabariq to`plam, tayanch funksiya, yechim nollari orasidagi masofa.*

В статье рассмотрена задача оценки расстояния между нулями решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с помощью опорных функций выпуклого множества.

Ключевые слова: выпуклое множество, опорная функция, расстояние между нулями решений.

By using support function of convex set this article considers the problem of obtaining distance solution' zeros of the linear differential equation of second-order.

Key words: *support function, convex set, distance of solution' zeros.*

1.Введение. Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + u_1(t)y' + u_2(t)y = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты $u_1(t), u_2(t)$ – измеримые функции при $t \in R^1$.

Обозначим через U множество всех измеримых вектор - функций $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, удовлетворяющих при $t \in R^1$ ограничению

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in P\ ,\ 0 \in \operatorname{int} P, \qquad (2)$$

где P - данное выпуклое компактное подмножество R^2.

Промежуток $[a,b]$, на котором любое нетривиальное решение уравнения (1) имеет не более одного нуля, называется промежутком неосцилляции уравнения (1).

Промежуток $[a, a+T_0)$ назовем максимальным промежутком неосцилляции для класса уравнений (1) при $u(\cdot) \in U$, если, во-первых, он является промежутком неосцилляции для любого уравнения из этого класса, во-вторых, существует нетривиальное решение уравнения (1), имеющее не менее двух нулей на отрезке $[a, a+T_0]$. Величина T_0 называется длиной максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (1) при $u(\cdot) \in U$.

Валле-Пуссеном [3] доказана следующая теорема:

Теорема 1. Длина T_0 максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (1) при $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \in U$, где

$$|u_1(t)| \le M,\ |u_2(t)| \le N,\ a \le t \le b$$

определяется по формуле

$$T_0 = 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + Ms + N} \qquad (3)$$

В настоящей работе, используя аппарат выпуклых функций [1] и динамического программирования [2], приведем обобщение этой теоремы.

2. Основной результат. Пусть R^n – евклидово пространство переменного $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ с нормой $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, а $\Omega(R^n)$ – совокупность всех непустых

компактных множеств из R^n. Напомним, что функция вектора $\psi \in R^n$

$$c(F,\psi)=\max_{f\in F}(f,\psi)\,, \qquad (3)$$

где $(\cdot,\cdot)-$ скалярное произведение, называется опорной функцией множества $F\in\Omega(R^n)$.

Теорема 2(ср.с [4]). Длина T_0 максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (1) при $u(\cdot)\in U$ определяется по формуле

$$T_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s^2+c(P,\psi(s))}\,, \qquad (4)$$

где $c(P,\psi(s))-$ опорная функция множества P в направлении вектора $\psi(s)=(s,1)$.

Доказательство. Пусть $x(t)-$ нетривиальное решение уравнения (1), имеющее нули в точках $t=0$ и $t=T_0$. Для определенности положим $x(0)=x(T_0)=0$, и $x(t)>0, 0<t<T_0$. В этом случае $x'(0)>0$ и $x'(T_0)<0$. Положим $\tau(t)=x'(t)/x(t), 0<t<T_0$. Тогда нетрудно убедиться, что функция $\tau(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\tau'(t)=-\tau^2(t)-u_1(t)\tau(t)-u_2(t)\,,\ 0<t<T_0 \qquad (5)$$

Отсюда в силу свойства опорных функций имеем

$$\tau'(t)\ge-\tau^2(t)-c(P,(\tau(t),1)),\ 0<t<T_0\,,$$

или

$$\frac{d\tau(t)}{\tau^2(t)+c(P,(\tau(t),1))}\ge -dt \qquad (6)$$

$$\frac{d\tau(t)}{\tau^2(t)+c(P,(\tau(t),1))}\ge -dt$$

Интегрируя это неравенство в пределах от 0 до T_0, с учетом равенств

$$\lim_{t\to 0}\tau(t)=\infty,\ \lim_{t\to 0}\tau(t)=-\infty,$$

получим, что

$$T_0\ge\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{s^2+c(P,\psi(s))}, \qquad (7)$$

где $\psi(s)=(s,1)$.

Теперь покажем, что в неравенстве (7) имеет место знак равенства. Для этой цели используем метод динамического программирования. В соответствии с ним введем функцию Беллмана [2] от переменных x и x': $\omega(x,x')=-T(x,x')$, где

$$T(x,x')=\int_{-\infty}^{x/x'}\frac{ds}{s^2+c(P,\psi(s))}\,.$$

Нетрудно увидеть, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{x'/x^2}{g(x,x')},\quad \frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{1/x}{g(x,x')},\quad g(x,x')=(x'/x)^2+c(P,(x'/x,1))\,.$$

Тогда

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}f_1(x,x')+\frac{\partial\omega}{\partial x'}f_2(x,x')=\frac{(x'/x)^2+u_1(x'/x)+u_2}{(x'/x)^2+c(P,(x'/x),1)}\le 1\,,$$

где $f_1(x,x')=x',\ f_2(x,x')=-u_2x-u_1x'$ в силу уравнения (1). Отсюда, в свою очередь, имеем

$$\max_{u(\cdot)\in U}\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}f_1(x,x')+\frac{\partial\omega}{\partial x'}f_2(x,x')\right]=\frac{\max\limits_{u(t)\in P}\left[(x'/x)^2+u_1(x'/x)+u_2\right]}{(x'/x)^2+c(P,(x'/x),1)}=1.$$

Следовательно, согласно принципу оптимальности Беллмана [2], функция $u(t),0\le t\le T_0$, обеспечивающая максимальность промежутка неосцилляции должна удовлетворять равенству

$$u_1x'+u_2x=c(P,(x,x')).$$

Таким образом, в силу положительной однородности опорной функции в (5), (6) должно быть равенство, что равносильно формуле (4). Теорема доказана.

3.Следствия теоремы 2. Согласно виду опорных функций конкретных множеств в силу доказанной теоремы можно сформулировать ряд следствий:

Следствие 1([3]). Промежуток $[a,b]$ будет промежутком неосцилляции для класса уравнений (1) при ограничениях на коэффициенты

$$|u_1(t)|\le M,\ |u_2(t)|\le N,\ a\le t\le b.$$

тогда и только тогда, когда

$$b-a=T_0=2\int_0^{+\infty}\frac{ds}{s^2+Ms+N}=\begin{cases}\dfrac{4}{M}, & \text{если } M^2-4N=0,\\ \dfrac{4}{\sqrt{4N-M^2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-arctg\dfrac{M}{\sqrt{4N-M^2}}\right), & \text{если } M^2-4N<0,\\ \dfrac{2}{\sqrt{M^2-4N}}\ln\dfrac{M+\sqrt{M^2-4N}}{M-\sqrt{M^2-4N}}, & \text{если } M^2-4N>0.\end{cases}$$

Следствие 2. Промежуток $[a,b]$ будет промежутком неосцилляции для класса уравнений (1) при ограничениях на коэффициенты $u=(u_1,u_2):(Au,u)\le 1$ тогда и только тогда, когда

$$b-a=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{s^2+\sqrt{<A^{-1}\psi(s),\psi(s)>}},$$

где $\psi(s)=(s,1)$, $A-$положительно определенная квадратная матрица размерности (2×2).

Следствие 3. Промежуток $[a,b]$ будет промежутком неосцилляции для класса уравнений (1) при ограничениях на коэффициенты $u=(u_1,u_2)$:

$$|u_1(t)|^p+|u_2(t)|^p\le 1,\ p>1, a\le t\le b$$

тогда и только тогда, когда

$$b-a=2\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^2+\sqrt[q]{1+s^q}},\quad q=\frac{p}{p-1}.$$

Пусть теперь множество P является алгебраической суммой двух множеств: $P=Q+S_R(0)$, где

$$Q=\{(u_1,u_2):|u_1|\le M,|u_2|\le N\},\quad S_R(0)=\{(u_1,u_2):u_1^2+u_2^2\le R^2\}\qquad(8)$$

Следствие 4. Промежуток $[a,b]$ будет промежутком неосцилляции для класса уравнений (1), (8) тогда и только тогда, когда

$$b-a=2\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^2+Ms+N+R\sqrt{s^2+1}}.$$

Следствие 5. Промежуток $[a,b]$ будет промежутком неосцилляции для класса уравнений (1) при ограничениях на коэффициенты $u=(u_1(t),u_2(t))$:

$$\frac{u_1^{\,2}}{a^2}+\frac{u_2^{\,2}}{b^2}\le 1,\quad \frac{u_1^{\,2}}{b^2}+\frac{u_2^{\,2}}{a^2}\le 1,\ \ b<a$$

тогда и только тогда, когда

$$b-a=\int_{\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s^2+f(a,b,s)},$$

где

$$f(a,b,s)=\begin{cases}\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2-b^2}(1-s), & \text{если} \quad s<\dfrac{b^2}{a^2};\\ \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}(s-1), & \text{если} \quad \dfrac{b^2}{a^2}\le s\le\dfrac{a^2}{b^2};\\ \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{a^2-b^2}(s-1), & \text{если} \quad s>\dfrac{a^2}{b^2}.\end{cases}$$

4. Численные примеры. Теперь приведем некоторые примеры численного вида. При этом при нахождении опорных функций конкретных множеств используются примеры вычисления опорных функций различных множеств и свойства опорных функций приведенные в [1].

Пример 1. Пусть вершины треугольника MNP находятся в точках $M(1;3), N(3;4)$ и $P(4;1)$. Вычислим опорную функцию треугольника MNP В силу свойства опорных функций имеем

$$c(P,\psi)=c(\Delta MNP,\psi)=\max(\psi_1+3\psi_2;\ 3\psi_1+4\psi_2;\ 4\psi_1+\psi_2)=$$

$$=\max(3s+1;\ 4s+3;\ s+4)=\psi_1\cdot\begin{cases}3s+1, & -\infty<s\le -1/2,\\ 4s+3, & -1/2\le s\le 3,\\ s+4, & 3\le s<+\infty\end{cases}$$

Поэтому, с учетом $\psi_1=1,\psi_2=s$ из формулы (4) получим, что наименьшее расстояние T между двумя соседними нулями нетривиального решения уравнения (1) равно

$$T=\int_{-\infty}^{-1/2}\frac{ds}{s^2+3s+1}+\int_{-1/2}^{3}\frac{ds}{s^2+4s+3}+\int_{3}^{+\infty}\frac{ds}{s^2+s+4}$$

Пример 2. Пусть $F=A\bigcap B$, где

$$A=\left\{(x,y):x^2+y^2\le 1\right\},\ B=\left\{(x,y):\frac{x^2}{4}+4y^2\le 1\right\}$$

Тогда опорная функция множества $F=A\bigcap B$ имеет вид

$$c(F,\psi)=\frac{\sqrt{5}}{15}\left(|8\psi_1-\psi_2|+2|\psi_1-2\psi_2|\right)$$

Поэтому с учетом $\psi_1=1,\psi_2=s$ из формулы (4) получим, что наименьшее расстояние T между двумя соседними нулями нетривиального решения уравнения (1) равно величине

$$T=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{s^2+\frac{\sqrt{5}}{15}\left(|8-s|+2|1-2s|\right)}$$

Пример 3. Пусть $F=conv\left\{(0;1),\ (-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}),(1,0)\right\}$ – треугольник. Опорная функция этого треугольника имеет вид

$$c(F,\psi)=\max\left\{|\psi_1|,|\psi_2|,\frac{|\psi_1+2\psi_2|}{\sqrt{5}}\right\}$$

Поэтому с учетом $\psi_1=1,\psi_2=s$ из формулы (4) получим, что наименьшее расстояние T между двумя соседними нулями нетривиального решения уравнения (1) равно величине

$$T=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{s^2+\max\left(1,|s|,\frac{|2s+1|}{\sqrt{5}}\right)}$$

Литература:

1. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление.- М.:Высшая школа, 2001.- 240 с.

2. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления.- М.: Наука, 1969. - 408 с.

3. De la Valle Poussin Ch. Sur l'equation differentialle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assigness. Extension aux equations d'ordren. //J.Math.pures et appl. 8(1929).№2. pp. 125-144/

4. Муминов Г.М. Об одной краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. // Изв. вузов. Математика.- 2001. -№6.- С.44–49.

Андижон давлат университети,
2016 йил 3 мартда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. А.Ўринов)