ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА ЕЧИМИ НОЛЛАРИ ОРАСИДАГИ МАСОФАНИ ҲИСОБЛАШ МАСАЛАСИ

Ғ.М.МЎМИНОВ, А.У.МИРЗАЕВ, Ф.Н.АЗИМЖОНОВ

Мақолада қабариқ анализ усулларидан фойдаланиб, иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама ечимлари тебранмаслигининг Валле-Пуссен белгилари умумлаштирилган.

Калит сўзлар: *қабариқ анализ, Валле-Пуссен белгиси, ечимлар тебранмаслиги, таянч функция, Понтрягин максимум принципи.*

В статье, используя методы выпуклого анализа, обобщаются признаки неколеблемости Валле-Пуссена для решения линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Ключевые слова: *выпуклый анализ, признак Валле-Пуссена, колеблемость решений, опорная функция, принцип максимума Понтрягина.*

By using the method of convex analysis for settlement of differential equations of the second order. this article generalizes the signs of steadfastness of Valle-Pussen.

Key words: *convex analysis, Valle-Poussin's versions, discongugate of the equation, support function, Pontryagin's maksimum principle.*

In this paper by using of the methods convex analysis is generalized Valle-Poussin's discongugate's versions for the linear differential equation second order.

Key words: *convex analysis, Valle-Poussin's versions, discongugate of the equation, support function, Pontryagin's maksimum principle.*

---

1. Коэффициентлари $p(t), q(t)$, $a \le t \le b$ узлуксиз функциялардан иборат бўлган иккинчи тартибли

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (1)$$

дифференциал тенгламани қараймиз. Бу тенгламанинг айнан нолдан фарқли $y(t)$ ечимининг қўшни ноллари $t = a$ ва $t = b$ нуқталарда бўлсин.

Қуйидаги масалани қараймиз: (1) тенгламанинг коэффициентлари

$$(p(t), q(t)) \in P,\ a \le t \le b \qquad (2)$$

муносабатни қаноатлантирганда, (1) тенглама ечимининг қўшни ноллари орасидаги $b - a = T$ масофа ҳисоблансин.

Масалани ечиш учун тенглама коэффициентларини бошқарув функциялари деб қабул қилиб, оптимал бошқарув назариясининг асоси ҳисобланган Л.С.Понтрягин максимум принципини [1] қўллаймиз. Бунинг учун $y = x_1,\ y' = x_2$ белгилашлар билан (1) тенглама бўйича

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -q(t)x_1 - p(t)x_2 \end{aligned}$$

тенгламалар системасини ёзамиз ва бу система ёрдамида

$$H(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, p(t), q(t)) = x_2\psi_1 - [q(t)x_1 + p(t)x_2]\psi_2$$

Понтрягин-Гамильтон функциясини тузамиз, бу ерда $\psi_1 = \psi_1(t), \psi_2 = \psi_2(t)$, $a \le t \le b$ функциялар

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = q(t)\psi_2$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = p(t)\psi_2 - \psi_1$$

қўшма системанинг ечимларидир. Агар $p^*(t)$, $q^*(t)$, $a \le t \le b$ қаралаётган масалада оптимал бошқарув функциялари бўлса, у ҳолда Понтрягин максимум принципига кўра

$$\max_{(p(t),q(t))\in P} H(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2, p(t), q(t)) = x_2\psi_1 - \left[q^*(t)x_1 + p^*(t)x_2\right]\psi_2 \ , \ a \le t \le b$$

муносабат бажарилиши керак. Аммо таянч функция тушунчасига кўра

$$\max_{(p(t),q(t))\in P} \left[q(t)x_1 + p(t)x_2\right] = c\left(Đ, (x_2, x_1)\right)$$

бўлгани учун $q^*(t)x_1 + p^*(t)x_2 = c(P,\ (x_2, x_1))$ тенгликка эга бўламиз. Демак, юқорида киритилган белгилашларга кўра қуйидаги тасдиқ ўринли:

1-теорема . (1) тенгламанинг коэффициентлари (2) чекланишларни қаноатлантирганда (1) тенгламанинг қўшни ноллари орасидаги $T = b - a$ масофа

$$y'' + c(P, (y', y)) = 0 \ , \ y(a) = 0, \ y(b) = 0 \qquad (3)$$

чегаравий масала ёрдамида аниқланади, бу ерда $c(P, (y', y))$ – P тўпламнинг y', y вектор йўналишидаги таянч функцияси.

(1) тенгламанинг қўшни ноллари орасидаги $T = b - a$ ни (3) муносабатдан фойдаланиб ҳисоблаш учун $y(t) > 0$, $t \in (a, b)$ деб ҳисоблаймиз ва бу тенгламанинг ҳар иккала қисмини y га бўлиб,

$$\frac{y''}{y} = -c\left(P, \left(\frac{y'}{y}, 1\right)\right)$$

ёки $\tau(t) = \dfrac{y'(t)}{y(t)}$ белгилаш билан бу тенгликни

$$-\tau'(t) = \tau^2(t) + c(P, (\tau(t), 1)) \text{ ёки } dt = -\frac{d\tau(t)}{\tau^2(t) + c(P, (\tau(t), 1))} \qquad (4)$$

кўринишда ёзишимиз мумкин. $y(t)$ (3) чегаравий масаланинг айнан нолдан фарқли ечими бўлиб, $y(t) > 0$, $t \in (a, b)$ бўлгани учун $y(a) > 0$, $y'(b) < 0$ деб ҳисоблашимиз мумкин. Шунинг учун

$$\lim_{t\to a} \tau(t) = +\infty \ , \ \lim_{t\to b} \tau(t) = -\infty$$

эканлигини эътиборга олиб, (4) тенгликни $[a, b]$ кесмада интегралласак,

$$b - a = -\int_{\tau(a)}^{\tau(b)} \frac{ds}{s^2 + c(P, (s, 1))} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + c(P, (s, 1))}$$

Демак, қуйидаги тасдиқ ўринли.

2-теорема. (1) тенгламанинг коэффициентлари (2) чекланишларни қаноатлантирганда, (1) тенгламанинг қўшни ноллари орасидаги $T = b - a$ масофа учун

$$b - a = T = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + c\left(P,(s,1)\right)} \qquad (5)$$

формула ўринли, бу ерда $c(P,(s,1))$ – P тўпламнинг $(s,1)$ вектор йўналишидаги таянч функцияси.

Энди эришилган натижанинг оптималлигини кўрсатамиз. Бунинг учун динамик дастурлаш усулидан фойдаланамиз ва шу мақсадда (y,y') ўзгарувчиларининг Беллман функциясини $\omega(y,y') = T(y,y')$ кўринишда киритамиз, бу ерда

$$T(y,y') = \int_{-\infty}^{y/y'} \frac{ds}{s^2 + c(P,(s,1))}$$

Натижада

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{y'/y^2}{g(y,y')}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y'} = -\frac{1/y}{g(y,y')},$$

муносабатларнинг ўринли эканлигини текшириш қийин эмас, бу ерда $g(y,y') = (y'/y)^2 + c(P,(y'/y,1))$. У ҳолда

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} f_1(y,y') + \frac{\partial \omega}{\partial y'} f_2(y,y') = \frac{(y'/y)^2 + p(t)(y'/y) + q(t)}{(y'/y)^2 + c(P,(y'/y,1)} \le 1 ,$$

бу ерда (1) тенгламага кўра $f_1(y,y') = y'$, $f_2(y,y') = -q(t)y - p(t)y'$

Ўз навбатида

$$\max_{(p(t),q(t))\in P}\left[\frac{\partial \omega}{\partial y} f_1(y,y') + \frac{\partial \omega}{\partial y'} f_2(y,y')\right] = \frac{\max\limits_{(p(t),q(t))\in P}\left[(y'/y)^2 + p(t)(y'/y) + q(t)\right]}{(y'/y)^2 + c(P,(y'/y,1)} = 1 .$$

Демак, Беллманнинг оптималлик принципига асосан

$$\max_{(p(t),q(t))\in P}\left[q(t)x_1 + p(t)x_2\right] = c\left(Đ,(x_2,x_1)\right)$$

тенглик ўринли.

2. Исботланган теоремалардан қаралаётган тўпламнинг таянч функциясини ҳисоблаш орқали бир қатор натижаларни олиш мумкин:

1-натижа (Вале-Пуссен). Агар (1) тенгламанинг коэффициентлари

$$|p(t)| \le M \ , \ |q(t)| \le N \ , \ a \le t \le b$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда (1) тенгламанинг қўшни ноллари орасидаги $T = b - a$ масофа учун

$$T=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s^2+M|s|+N}=\begin{cases}\dfrac{4}{M}, & \text{агар } M^2-4N=0 \text{ бўлса,}\\ \dfrac{4}{\sqrt{4N-M^2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-arctg\dfrac{M}{\sqrt{4N-M^2}}\right), & \text{агар } M^2-4N<0 \text{ бўлса,}\\ \dfrac{2}{\sqrt{M^2-4N}}\ln\dfrac{M+\sqrt{M^2-4N}}{M-\sqrt{M^2-4N}}, & \text{агар } M^2-4N>0 \text{ бўлса,}\end{cases}$$

формула ўринли.

2-натижа. Агар (1) тенгламанинг коэффициентлари

$$|p(t)|^{\alpha}+|q(t)|^{\alpha}\le 1,\alpha>1,\quad a\le t\le b$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда (1) тенгламанинг қўшни ноллари орасидаги $T = b - a$ масофа учун

$$T=2\int_0^{\infty}\frac{ds}{s^2+\sqrt[q]{1+s^q}},\quad q=\frac{p}{p-1}.$$

формула ўринли.

Энди P тўплам иккита тўпламларнинг алгебраик йиғиндисидан иборат, яъни $P=Q_1+Q_2$ бўлиб, бунда

$$Q_1=\{(p,q):|p(t)|\le M\ ,\ |q(t)|\le N\ \},\ Q_2=\{(p,q):p^2(t)+q^2(t)\le R^2\ \},\ a\le t\le b$$

бўлсин. У ҳолда қуйидаги натижа ўринли:

3-натижа. Агар (1) тенглама коэффициентларининг P тўплами иккита тўпламнинг алгебраик йиғиндисидан иборат, яъни $P=Q_1+Q_2$ бўлса, у ҳолда (1) тенгламанинг қўшни ноллари орасидаги $T = b - a$ масофа учун

$$T=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s^2+M|s|+N+R\sqrt{1+s^2}}$$

формула ўринли.

4-натижа. Агар (1) тенгламанинг коэффициентлари

$$\frac{p^2(t)}{m^2}+\frac{q^2(t)}{n^2}\le 1,\qquad \frac{p^2(t)}{n^2}+\frac{q^2(t)}{m^2}\le 1,\quad n<m$$

тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда (1) тенгламанинг қўшни ноллари орасидаги $T = b - a$ масофа учун

формула ўринли, бу ерда $T=\int\limits_{\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s^2+f(m,n,s)}$,

$$f(a,b,s)=\begin{cases}\dfrac{mn\sqrt{m^2+n^2}}{m^2-n^2}(1-s), & агар \quad s<\dfrac{n^2}{m^2};\\ \dfrac{mn\sqrt{m^2+n^2}}{m^2+n^2}(s-1), & агар \quad \dfrac{n^2}{m^2}\le s\le\dfrac{m^2}{n^2};\\ \dfrac{mn\sqrt{m^2+n^2}}{m^2-n^2}(s-1), & агар \quad s>\dfrac{m^2}{n^2}.\end{cases}$$

Натижани исботлаш учун $P=A\bigcap B$ тўпламларнинг таянч функцияларини ҳисоблаш етарли, бу ерда

$$A=\left\{(p,q):\ \frac{p^2}{m^2}+\frac{q^2}{n^2}\le 1\right\},\qquad B=\left\{(p,q):\ \frac{p^2}{n^2}+\frac{q^2}{m^2}\le 1\right\}.$$

Юқоридаги каби натижаларни кўплаб келтиришимиз мумкин.

3.Валле-Пуссен белгисини умумлаштириш. $(\alpha,\beta),-\infty<\alpha<\beta<+\infty$ оралиқда

$$Lx\equiv x''+p_1(t)x'+p_2(t)x=0 \qquad (1)$$

тенгламани қараймиз.

(1) тенгламанинг коэффициентларига маълум шартлар қўйилганда, унинг ҳар бир ечими (α,β) оралиқда тебранмаслиги, яъни биттадан ортиқ нолга эга бўлмаслигини таъминловчи Валле-Пуссен ва В.А.Кондратьевнинг эффектив белгилари мавжуд. Бу белгиларни баён этиш учун (1) тенглама ечимининг биринчи нолини $t=\alpha$ нуқтада деб ҳисоблаб, ечимининг барча нолларини

$$\alpha=r_0(\alpha)<r_1(\alpha)<r_2(\alpha)<\dots$$

кетма-кетлик кўринишида жойлаштирамиз.

$\beta<r_1(\alpha)$ тенгсизлик бажарилишини таъминловчи Валле-Пуссеннинг тебранмаслик белгиси: $\beta<r_1(\alpha)$ тенгсизлик бажарилиши учун $[\alpha,\beta]$ кесмада $v(\alpha)=v(\beta)=0,\ Lv\le 0$ шартларни қаноатлантирувчи $v(t)\ge 0$ функциянинг мавжуд бўлиши зарур ва етарли, бу ерда Lv ифода $[\alpha,\beta]$ кесмада айнан нолдан фарқли.

$\beta<r_1(\alpha)$ тенгсизлик бажарилишини таъминловчи В.А.Кондратьевнинг тебранмаслик белгиси қуйидагича: (1) тенглама ечимлари $[\alpha,\beta]$ кесмада тебранмаслиги учун $[\alpha,\beta]$ кесмада $Lu\le 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи (α,β) оралиқда мусбат қийматлар қабул қилувчи ва икки марта узлуксиз дифференцияланувчи функциянинг мавжуд бўлиши зарур ва етарли.

(1) тенглама тебранмаслиги ҳақидаги Валле-Пуссен ва В.А.Кондратьевнинг эффектив белгиларини қабариқ анализ тушунчаларидан фойдаланиб янада давом эттириш мумкин.

(1) тенглама коэффициентларидан қийматларини P қабариқ компакт тўпламдан қабул қилувчи $p(t)=(p_1(t),p_2(t)$ вектор функцияни тузамиз ва $c(P,\psi)$ билан P тўпламнинг $\psi\in R^2$ вектор йўналишдаги

$$c(P,\psi)=\max_{p\in P}(p,\psi)$$

таянч функциясини қараймиз.

3-Теорема. $\beta < r_1(\alpha)$ бўлиши учун $v(t)$ функция

$$v'' + c\left(P,(v',v)\right)=0,\ v(\alpha)=0,\ v'(\alpha)=1 \qquad (6)$$

Коши масаласининг ечими бўлиши зарур ва етарли.
Теореманинг исботи қуйидаги лемма орқали амалга оширилади
Лемма. Айтайлик, $[\alpha,\beta]$ (1) тенгламанинг тебранмаслик оралиғи ва $z(t)$

$$z'' + c\left(P,(z',z)\right)=0,\ z(a)=z(b)=0$$

Коши масаласини ечими бўлсин. У ҳолда

$$z(t)\ge 0,\quad Lz(t)\le 0,\ a\le t\le b$$

бўлади.

Исботи: Айтайлик, α ва β $z(t)$ функциянинг $[\alpha,\beta]$ кесмадаги ихтиёрий иккита кетма-кет келган ноллари бўлиб, $a\le\alpha,\ \beta\le b$ бўлсин.

Тескаридан фараз қиламиз: $z(\alpha)=z(\beta)=0$ бўлиб,

$$z(t)<0,\qquad \alpha\le t\le\beta$$

бўлсин. У ҳолда $z'(\alpha)\le 0,\quad z'(\beta)\ge 0$ бўлиши равшан. $v(t)$ билан

$$\begin{aligned} &Lv\equiv v'' + p_1(t)v' + p_2(t)v=0\\ &v(\alpha)=0,\qquad v'(\alpha)=\text{const}>0 \end{aligned} \qquad (7)$$

Коши масаласининг ечимини белгилаймиз.

У ҳолда $[a,b]$ кесма (1) тенглама ечимларининг тебранмаслик оралиғи бўлгани учун ва $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ эканлигидан $v(t)>0,\ \alpha<t<\beta$ бўлади, чунки у $[\alpha,\beta]$ кесмада биттадан ортиқ нолга эга эмас.

(1) тенгламанинг $v(t)$ функцияга (7) тенгламани эса $z(t)$га кўпайтириб, ҳосил бўлган иккинчи тенгликдан биринчи тенглик айрилса,

$$z''v - zv'' + p_1(t)(z'v - zv') = v(t)\left[p_1(t)z' + p_2(t)z - c\left(P,(z'(t),z(t))\right)\right]$$

ёки

$$(z'v - zv')' + p_1(t)(z'v - zv') = f(t) \qquad (8)$$

тенглик ҳосил бўлади, бу ерда $[\alpha,\beta]$ кесмада таянч функция хоссаларига кўра

$$f(t)=p_1(t)z' + p_2(t)z - c\left(P,(z'(t),z(t))\right)<0$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

(8) тенгликни $\exp\int_t^{} p_1(\tau)d\tau$ интегралаш кўпайтувчисига кўпайтириб бу тенгликни

$$\left[(z'v - zv')\exp\int_t^{} p_1(\tau)d\tau\right]' = f(t)v(t)\exp\int_t^{} p_1(\tau)d\tau$$

кўринишида ёзамиз.

Охирги тенгликни $[\alpha,\beta]$ кесмада $v(\alpha)=z(\alpha)=z(\beta)=0$ чегаравий шартларни эътиборга олиб интегралласак,

$$z'(\beta)v(\beta)\exp\int_\alpha^\beta p_1(\tau)d\tau = \int_\alpha^\beta\left[f(s)\tau(s)\exp\int_s^{} p_1(\tau)d\tau\right]ds$$

тенглик ҳосил бўлади. Аммо бу тенгликнинг бўлиши мумкин эмас, чунки $z'(\beta)\ge 0,\ v(\beta)>0$ бўлгани учун тенгликнинг чап қисми манфий эмас, худди шу вақтнинг ўзида $f(t)<0,\quad v(t)>0,\quad \alpha<t<\beta$ бўлгани учун тенгликнинг ўнг қисми қатъий манфий. Ҳосил бўлган зиддият бизнинг $a\le\alpha<t<\beta\le b$ бўлганда $z(t)<0$ деб юритган фаразимиз нотўғри эканлигини билдиради, бу ерда α ва β, $z(t)$ функциянинг кетма-кет жойлашган ноллари. Шунинг учун

$$z(t)\ge 0,\qquad a\le t\le b.$$

Энди $z(t)$ функция учун $Lz\le 0,\quad a\le t\le b.$ тенгсизликни ўринли бўлишини кўрсатамиз

$$Lz = z'' + p_1(t)z' + p_2(t)z = z'' + c(P,(z',z)) + \left[p_1(t)z' + p_2(t)z - c\left(P,(z',z)\right)\right] =$$
$$= p_1(t)z' + p_2(t)z - c\left(P,(z',z)\right)\le 0,\ \ a\le t\le b.$$

Демак,

$$Lv\ \le 0,\quad a\le t\le b.$$

Лемма исботланди.

Баён этилган белги билан турли кўринишдаги P тўпламлар учун (1) тенглама тебранмаслиги таъминловчи белгиларни олиш мумкин.

Л.С.Понтрягин максимум принципи ёрдамида (1) тенглама ечимлари тебранмаслигининг қуйидаги белгисини келтириш мумкин.

4-Теорема. Агар (1) тенглама коэффициентлари

$$p(t)=(p_1(t),\ p_2(t)\ \in P,\quad 0\ \mathrm{int}\,P$$

шартни қаноатлантирса, у ҳолда (1) тенглама ечими тебранмаслигининг $[\alpha,\beta]$ оптимал оралиғи

$$\beta-\alpha < \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{s^2 + c\left(P,(s,1)\right)} \qquad (9)$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарли.

Мисол тариқасида (9) тенгсизликка асосланган ҳолда бу теоремадан қуйидаги натижаларни келтирамиз.

5-натижа.(Вале-Пуссен) Агар

$$P = \left\{(p_1(t), p_2(t)): \ \ |p_1(t)| \le M_1, \ \ |p_1(t)| \le M_2\right\}$$

бўлса, у ҳолда

$$\beta - \alpha < 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + M_1 s + M_2}$$

6-натижа. Агар

$$P = \left\{(p_1(t), p_2(t)): \ p_1^{\,2}(t) + p_2^{\,2}(t) \le R^2\right\}$$

бўлса, у ҳолда

$$\beta - \alpha < 2\int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + R\sqrt{1+s^2}}$$

Бу натижаларнинг исботи мос тўпламларнинг таянч функцияларини ҳисоблаш орқали амалга оширилади.

Адабиётлар:

1. Блогадатских В.И. Введение в теорию оптимального управления.- М.: Высшая школа, 2001.
2. de la Vallee Poussin. J. Math. Pures et Appl. 8(1929) 8, №2, 125-144.
3. Hartman P., Wontikker R. Quart. Appleid. Math. 13(1955).
4. Кондратьев В.А. Успехи математических наук. Т.184.- 1969.- № 2.- С.296-298.
5. Муминов Г.М. Дифференциальные уравнения и топология. Меж.конф.- М., 2008

Андижон давлат университети,
2014 йил 20 майда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. А.Ўринов)