LIMITLARNI HISOBLASHDA SHTOLTS TEOREMASIDAN FOYDALANISH

A.Qodirov, N.Hakimova

Maqolada Shtolts teoremasini limitlarni hisoblashda qo‘llash imkoniyatlari masala, misollar yordamida ko‘rsatilgan.

***Kalit so‘zlar**: Shtolts teoremasi, limit, egri chiziqli uchburchak, to‘g‘ri to‘rtburchak.*

В статье на конкретных примерах и задачах показаны возможности применения теоремы Штольца в решении лимитов.

Ключевые слова: *теорема Штольца, предел, криволинейный треугольник, прямоугольник, бином Ньютона.*

This article is considered the theorem of shtolts and it’s using is shown in examples and tasks.

***Key words:** Shtolts theorem, curve triangle quadrangle, limit, rectangle, Nyuton’s binom.*

Aniqmasligi $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishida bo‘lgan $\frac{X_n}{Y_n}$ ifodalarning limitlarini hisoblashda Shtolts teoremasi ko‘pincha foydalidir .

Teorema. *Aytaylik, $\{y_n\}$ etma-ketlik hech bo‘lmaganda n ning biror natural qiymatidan boshlab o‘suvchi va $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ mavjud bo‘lsa, u holda $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ tenglik o‘rinli.*

Misollar keltiramiz.

1-misol. Umumiy hadi $u_n=\frac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2}{n^3}$ bo‘lgan ketma-ketlikning limitini hisoblang.

Shtolts teoremasiga ko‘ra

$$x_n=1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2,\quad y_n=n^3 \text{ bo‘lgani uchun}$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2}{n^3-(n-1)^3}=\frac{4}{3}$$

2-misol. $u_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^2}-\frac{n}{3}$ ketma-ketlikning limitini toping.

Dastlab bu $\infty-\infty$ aniqmaslikni $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishga keltiramiz:

$u_n=\frac{3\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)-n^3}{3n^2}$ Shtolts teoremasiga ko‘ra

$x_n=3\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)-n^3,\ y_n=n^2$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-\left[n^3-(n-1)^3\right]}{3\left[n^2-(n-1)^2\right]}=\frac{1}{2}$$

3-misol. $u_n = \dfrac{1+a+2a^2+\ldots+na^n}{na^{n+2}}$ ketma-ketlikning limitini hisoblang.

Shtolts teoremasiga ko‘ra $x_n = 1+a+2a^2+\ldots+na^n$, $y_n = na^{n+2}$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{na^n}{na^{n+2}-(n-1)a^{n+1}} = \frac{1}{a(a-1)};\quad (a\neq 1).$$

Quyidagi masalani ko‘ramiz: Ox o‘qi, $x=a$ $(a>0)$ to‘g‘ri chiziq va $y=x^m$ chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli OAB uchburchak yuzi hisoblansin. $(m\in N)$

Yechilishi. Y B

Egri chiziql iuchburchak OAB ning yangi $OA=a$ kesmasini $x_0=0,\ x_1=\dfrac{a}{n},\ x_2=\dfrac{2a}{n}$,… ,

$x_{n-1}=\dfrac{(n-1)a}{n}$, $x_n=\dfrac{na}{n}=a$ nuqtada teng n ta bo‘lakka bo‘lamiz. Bu nuqtalardan *Ox* o‘qiga perpendikulyar qilib $y=x^m$ egri chiziq bilan kesishguncha chiziqlar o‘tkazamiz $y=x^m$. Asoslari OA kesmada joylashgan, balandliklari esa o‘sib borish tartibida bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklar tuzamiz. Shtrixlangan shakllardan har birining asosi $\dfrac{a}{n}$ ga, to‘g‘ri to‘rtburchaklarning balandliklari o‘sib borish tartibida $y_1 = x_1^m - \dfrac{a^m}{n^m}$, $y_2 = x_2^m = (\dfrac{2a}{n})^m$, … , $y_{n-1} = \dfrac{(n-1)^m a^m}{n^m}$ qiymatlarga ega.

Bu to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzalarining yig‘indisi S_n:

$$S_n = \frac{a}{n}y_1 + \frac{a}{n}y_2 + \ldots + \frac{a}{n}y_{n-1} = \frac{a}{n}\left(\frac{a^m}{n^m} + \frac{2^m a^m}{n^m} + \frac{3^m a^m}{n^m} + \ldots + \frac{(n-1)^m a^m}{n^m}\right) = a^{m+1}\frac{1+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m}{n^{m+1}}$$

Shtolts teoremasiga ko‘ra, $x_n = 1+2^m+3^m+\ldots+(n-1)^m$,

$y_n = n^{m+1}$ deb qabul qilsak,

$$S = a^{m+1}\lim_{n\to\infty} S_n = a^{m+1}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = a^{m+1}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a^{m+1}\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^m}{n^{m+1}-(n-1)^{m+1}}$$

Nyuton binomiga asosan

$$(n-1)^{m+1} = n^{m+1} - (m+1)n^m + \frac{(m+1)m}{2}n^{m-1} + \ldots$$

bo‘lgani uchun

$$S = a^{m+1}\lim_{n\to\infty}\frac{n^m\left(1-\frac{1}{n}\right)^m}{n^{m+1} - n^{m+1} + (m+1)n^m + \frac{m(m+1)}{2}n^{m-1} + \ldots} = \frac{a^{m+1}}{m+1}$$

Mazkur usuldan litseylardagi matematika to‘garaklarida foydalanishlari mumkin. Buni yaxshi o‘zlashtirgan talabalar o‘z bilimlarini yanada oshirishga zamin yaratadilar. Shu usul bilan quyidagi limitlarni hisoblashni o‘quvchilarga tavsiya etamiz:

$\lim_{n\to\infty} u_n$ hisoblansin:

1. $u_n = \dfrac{1*2+2*3+3*4+\ldots+n(n+1)}{n^3}$,

2. $u_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^3}$,

3. $u_n = \dfrac{1}{n}\left[(a+\dfrac{1}{n})^2+(a+\dfrac{2}{n})^2+\ldots+(a+\dfrac{n-1}{n})^2\right]$

4. $u_n = \dfrac{1^p+2^p+3^p+\ldots+n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1} \quad (p \in N).$

Adabiyotlar:

1. Фихтенгольц Г.М. Дифференциал ва интеграл ҳисоб курси. 1-том.- Т.: Ўздавнашр, 1951.

2.Коровкин П.П. Математический анализ. Ч.1.- М.: Госучпедиздат, 1963.

3. Кудрявиев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Ч.1.- М.: Наука, 1984.

Андижон давлат университети,
2017 йил *19 январ*да қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)