ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ MATHCAD И MAPLE

А.Имомов, Б.Эргашев

Мақолада Mathcad ва Maple дастурида математик тизимдаги чизиқли бўлмаган тенгламаларни ечиш усуллари таҳлил қилинади.

Калит сўзлар: *тақрибий ечим, чизиқсиз тенгламалар, оддий ҳайдаш усули, ҳайдашнинг Ньютон усули, Mathcad, Maple.*

В статье рассматриваются методы решения нелинейных уравнений в математических системах Mathcad и Maple.

Ключевые слова: *приближенное решение, нелинейное уравнение, метод простой итерации, метод итерации Ньютона, Mathcad, Maple.*

In this article methods of solving nonlinear equations in mathematical systems Mathcad and Maple are considered.

Keywords*: approximate solution, nonlinear equation, simple iteration method, Newton iteration method, Mathcad, Maple.*

В настоящее время появились специальные математические программы – математические системы. В вузах на занятиях чаще всего применяются математические системы: Mathcad, MATLAB, Maple, Mathematika [1-5]. Использование математических систем превращает обучение в интересный процесс, содержание занятий усваивается быстрее, глубже, оставляя больше времени для укрепления занятий. Эти свойства играют важную роль из-за возможности решения задач в математических системах без составления программ, возможности в них представления и анимации, визуализации решений в виде таблиц и графиков, составления простых естественных, близких к языку математики алгоритмов и программ.

В статье возможности Mathcad и Maple демонстрируются на примере приближённого решения линейных уравнений из «численных методов».

В Mathcad и Maple задачи решаются тремя способами:

1) с помощью внутренних функций математических систем;

2) с помощью естественного математического алгоритма решения (пока возможно только в Mathcad, из-за наличия дискретной переменной);

3) с помощью программы, во внутреннем языке математических систем.

В численных методах СЛАУ $Ax = b$ решается итерационными методами из-за невозможности её решить точно при больших размерах матрицы A. Для этого строится последовательность векторов $\{x^{(k)} \in R^n\}$ со свойствами $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = \overline{x} = \xi, A\xi = b$. Тогда выбирают номер *k* такой, чтобы выполнялись неравенства: $(\left\|x^{(k)} - \overline{x}\right\| \le \varepsilon) \vee (\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \le \varepsilon), \varepsilon > 0$ и полагают: $\xi \approx x^{(k)} \pm \varepsilon$. .

1. Теория методов итерации для СЛАУ.

СЛАУ $Ax = b$ сводится к эквивалентному виду $x = d + Tx, T = E - \tau A, d = \tau b, \tau > 0$, так, чтобы выполнялось условие сходимости метода итерации: $q = \left\|T\right\| < 1$, где $\left\|\circ\right\|$ какая-либо норма матрицы. Матрица $T = E - \tau A, Ex = x$ ***называется итератором*** и итерации строятся по формуле: $x^{(k+1)} = d + Tx^{(k)}, k = 0,1,\ldots$.

Сведение СЛАУ к виду $Ax = b \Leftrightarrow x = d + Tx, q = \left\|T\right\| < 1$ важно так как справедливо:

Теорема 1. Для сходимости метода итерации достаточно одного из условий:

1) $\|T\| = \|E - \tau A\| < 1$, т.е. итератор имеет норму, меньше единицы.

2) $\sum_{j \neq i}^{n} |t_{ij}| < |t_{ii}|, i = 1..n$, т.е. матрица имеет доминирующую главную диагональ.

3) $A = A^T, A > 0$, т.е. матрица А нормальна: $(Ax, y) = (x, Ay), (Ax, x) > 0, \forall x, y$.

4) $\lambda_{\max}(A) < 1$, т.е. максимальное собственное значениеАменьше единицы.

Для итераций справедливы оценки:

$$\|\xi - x^{(k)}\| \le q^{(k)} \|\xi - x^{(0)}\|, \|\xi - x^{(k)}\| \le q/(1-q) \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \le \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|.$$

2. Методы итераций для СЛАУ.

а) метод простой итерации строится так:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij} x_i^{(k)}), i = 1..n, dJ_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, TJ_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, j \neq i,$$

$$x^{(k+1)} = dJ + TJx^{(k)}, k = 0,1,\ldots.$$

б) метод Зейделя строится так:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_i^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_i^{(k)}), i = 1..n, dS_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, TS_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, j \neq i,$$

$$x^{(k+1)} = dS + TSx^{(k)}, k = 0,1,\ldots, TS = (D-L)^{-1}U, dS = (D-L)^{-1}b$$

в) метод верхней релаксации строится так:

$$Ax = b \Rightarrow (D - L - U)x = b \Rightarrow \omega(D - L - U)x = \omega b \Rightarrow -\omega Lu = \omega(U - D)x + \omega b \Rightarrow$$

$$Dx - \omega Lux = Dx + \omega(U - D)x + \omega b \Rightarrow (D - \omega L)x = [(1-\omega)D + \omega U]x + \omega b \Rightarrow$$

$$x = TRx + dR, TR = (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U], dR = \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

$$x^{(k+1)} = dR + CRx^{(k)}, k = 0,1,\ldots, CR = (D - L\omega)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U], dR = \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

2. Решение СЛАУ в математической системе Mathcad с помощью методов простой итерации Якоби (J), Зейделя (S) и верхней релаксации R.

Приближённое решение СЛАУ этими методами демонстрируем с помощью следующего примера:

$$A := \begin{bmatrix} 40 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 40 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 40 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 40 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 43 \\ 45 \\ 46 \\ 44 \end{bmatrix} \quad E := identity(4) \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x^{<1>} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y^{<1>} := x^{<1>}$$

$$D := \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix} \quad L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad U := \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad k := 0..10$$

$TJ := D^{-1`}(L+U) \quad dJ := D^{-1}b \quad x^{<k+1>} := dJ + TJx^{<k>}$ *(метод Якоби)*

$TS := (D-L)^{-1}U \quad dS := (D-L)^{-1}b \quad y^{<k+1>} := dS + TSy^{<k>}$ *(метод Зейделя)*

$TR := (D - \omega L)^{-1}[(1-\omega)D + \omega U] \quad dR := \omega(D - \omega L)^{-1}b \quad z^{<k+1>} := dR + TRz^{<k>}$ *(м. релаксации)*

Выполняя расчёты по этим формулам, получаем следующие результаты:

x =

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1.075	0.991	1.001	1	1	1	1
2	0	1.125	0.986	1.002	1	1	1	1
3	0	1.15	0.984	1.002	1	1	1	1
4	0	1.1	0.988	1.001	1	1	1	1

y =

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1.075	0.997	1	1	1	1	1
2	0	1.071	0.997	1	1	1	1	1
3	0	1.07	1.001	1	1	1	1	1
4	0	0.993	1	1	1	1	1	1

z =

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0.86	0.981	0.998	1	1	1	1
2	0	0.866	0.983	0.998	1	1	1	1
3	0	0.868	0.986	1	1	1	1	1
4	0	0.811	0.963	0.993	0.999	1	1	1

3. Сведение СЛАУ к нормальному виду и применение метода итерации Зейделя.

Если система $Ax = b$ не имеет доминирущей главной диагонали, то её предварительно сводят к нормальному виду и применяют метод Зейделя.Нормальная СЛАУ имеет матрицу с двумя следующими свойствами:

1) А матрица симметрична, т.е. $(Ax, y) = (x, Ay), \forall x, y \in R^n$;

2) А матрица положительно определённая: $A > 0 \Leftrightarrow (Ax, x) > 0, \forall x \in R^n$.

Произвольную СЛАУ $Ax = b$ ЧАТС можно свести к нормальному виду следующим образом: $A^T Ax = A^T b$. Раньше, до появления математических систем, сведение СЛАУ к нормальному виду и применение к ней методов итерации было затрудительно. Рассмотрим пример:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad TR := A^T A \quad dR := A^T b \quad TS = \begin{bmatrix} 14 & 10 & 14 \\ 10 & 9 & 12 \\ 14 & 12 & 26 \end{bmatrix} \quad dS = \begin{bmatrix} 38 \\ 31 \\ 52 \end{bmatrix}$$

$$D := \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix} \quad L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 \\ -14 & -12 & 0 \end{bmatrix} \quad U := \begin{bmatrix} 0 & -10 & -14 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$TS := (D - L)^{-1} U \quad dS := (D - L)^{-1} d \quad t := [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad k := 1..30 \quad t^{<k+1>} := dS + TS\, t^{<k>} \quad t =$$

t =

	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0.997	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	1	1
2	1.003	1.002	1.002	1.001	1.001	1.001	1.001	1.001	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...

Приведём ещё один способ решения произвольной СЛАУ сведением её предварительно к нормальному виду методом Зейделя:

ORIGIN:=1 n:=3 e:=0.0000001 i:=1..n j:=1..n

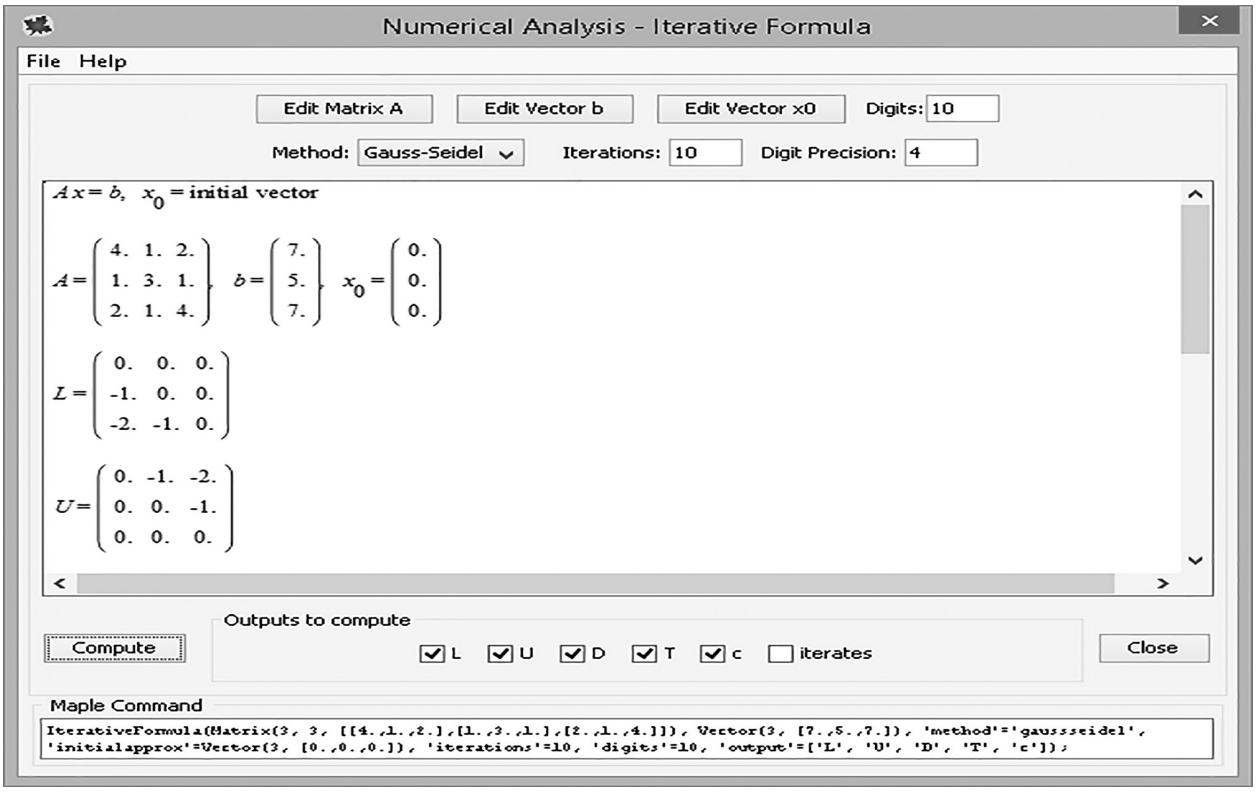
$$A1 := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad b1 := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad A := A1^T A1 \quad b := A^T b1 \quad L_{ij} := if(i > j, -A_{ij}, 0) \quad U_{ij} := if(i < j, -A_{ij}, 0)$$

$$D := if(i = j, A_{ii}, 0) \quad T := (D - L)^{-1} U \quad c := (D - L)b \quad h(x) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

$$Z(x, m, \varepsilon) := \left| \begin{array}{l} \text{for } k \in 1..m \\ \quad \left| \begin{array}{l} y \leftarrow C + T \cdot x \\ r \leftarrow h(x - y) \\ x \leftarrow y \\ \text{break if } r < \varepsilon \end{array} \right. \\ (x \;\; r \;\; k) \end{array} \right. \qquad (x \quad r \quad k) := Z(x, 100, 0.00001) \quad x = (1 \quad 1 \quad 1) \quad r = 7.347 \circ 10^{-5} \quad k = 21$$

4. **Решение СЛАУ в математической системе Maple.**

Те же самые методы итерации в системе Maple можно применить к решению СЛАУ в интерактивном режиме, что очень интересно для студентов, изучающих методы итерации решения системы линейных уравнений из-за отличной визуальной возможности. Вызывается диалоговое окно в текущее окно программы Maple командой Tools>Numerical Analysis>Iterative Formula, в результате чего появляется диалоговое окно ввода, редактирования матрицы, правой части и начальной итерации, задания количества итераций. Вывод параметров можно организовать или отключить в окно диалога. В самой нижней части окна имеется полный перечень набранных команд Maple при работе с диалоговым окном. Запуск программы осуществляется нажатием кнопки Compute в нижней левой части диалогового окна:



В результате мы имеем следующие картину (картина создана на основе вычислений в Maple и продолжит первый вид диалогового окна):

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \; b = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \; x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \; U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x_{(k+1)} = Tx_{(k)} + c \;\; T = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -.2500 & -.5000 \\ 0 & .8333e-1 & -.1667 \\ 0 & .1042 & .2917 \end{bmatrix} \; C = (D-L)^{-1}b = \begin{bmatrix} 1.750 \\ 1.083 \\ .6042 \end{bmatrix} \; x_{(10)} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

Литература:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. Главная редакция физико-математической литературы.- М.: Наука, 1974. - 296 с.
2. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе Mathcad.- СПб.: Лань, 2008.-352 с.
3. Имомов А. Решение математических задач в Maple.- Наманган, НамГУ, 2017.- 100 с.
4. Burden R.L. Numerical Analysis. Books Cole. Boston, USA.-2010.-895 pp.

Наманган давлат университети,
2017 йил 25 декабрда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)