PARAMETR QATNASHGAN KVADRAT TENGLAMALARNI YECHISHDA BA'ZI BIR TEOREMALARDAN FOYDALANISH

A.Ahlimirzayev, M.Ibragimov, N.Abdullayeva, Sh.Erkinjonova

Maqolada parametr qatnashgan kvadrat tenglamalarni yechishni soddalashtiruvchi teoremalardan foydalanish bo'yicha mulohazalar bayon qilingan.

Kalit so'zlar: *parametr, kvadrat tenglama, diskriminant, kvadrat ildiz, qarama-qarshi sonlar, qarama-qarshi ishorali ildizlar.*

В статье рассматриваются некоторые теоремы, облегчающие решение квадратных уравнений с параметрами.

Ключевые слова: параметр*, квадратные уравнения, дискриминант, квадратный корень, противоположные числа, корни* с противоположными знаками.

This article considers some theorems which facilitates the solution of quadratic equations with parameters.

Key words: *parameter, square equations, discriminant, square root, opposite numbers, roots with opposite signs.*

Ma'lumki, ko'plab fizik va mexanik jarayonlarni hamda geometrik qonuniyatlarni o'rganish ko'pincha parametrga bog'liq masalalarni tuzish va ularni yechishga keltiriladi. O'quvchilarda bunday masalalarni tuzish va yechish malakalarini hosil qilish kelgusida ularning oliy o'quv yurtlarida o'qitiladigan texnika fanlarini o'zlashtirishlarida muhim o'rin tutadi. Shuning uchun ham umumiy o'rta ta'lim maktablari va akademik litseylarda matematikani o'qitishda parametrli masalalarga, jumladan, parametr qatnashgan tenglamalarni o'rganishga alohida ahamiyat berilishi zarur. Bunday masalalarni o'rganishni eng avvalo parametr tushunchasini o'rgatishdan boshlash kerak. Sir emaski, ko'plab o'quvchilar parametr tushunchasining mazmun-mohiyatini bilmaydilar va uni noma'lum miqdor tushunchasi bilan chalkashtirib yuboradilar. Bu tushunchalarning mohiyatini ochib berish maqsadida quyidagi misolni qaraymiz.

Aytaylik, $2x - y - z = x + 1$ berilgan bo'lsin. Agar bizning oldimizga tenglikdagi *x* va *y* o'zgaruvchilarni berilgan tenglikni to'g'ri tenglikka aylantiradigan qiymatlari juftliklarini topish masalasi qo'yilgan bo'lsa, u holda bu tenglik *x* va *y* o'zgaruvchili tenglama, *Z* o'zgaruvchi esa parametr deb ataladi. Bu holda berilgan tenglamani *x* va *y* o'zgaruvchilarning quyidagi qiymatlar juftliklari qanoatlantiradi:

1) $x = 1, y = z$; 2) $x = z, y = 1$; 3) $x = 2z, y = -z + 1$ va hakazo.

Bunda parametrga shunday qiymatlar beriladiki, natijada berilgan tenglamaning chap va o'ng tomonlarida aniqlanish sohasi bo'sh bo'lmagan funksiyalar hosil bo'ladi.

Parametr bilan noma'lumlarni chalkashtirmaslik uchun, uni *a, b, c, d, …, m, n* harflari bilan belgilanadi. Berilgan ifodalarda, tenglamalarda va tengsizliklarda bir nechta parametr qatnashishi mumkin. Umuman olganda, o'quvchilar parametr tushunchasi bilan quyidagi mavzularni o'rganish jarayonida tanishadilar:

1) $y = kx + b$ — chiziqli funksiya (*x* va *y* o'zgaruvchilar; *k* va *b* parametrlar);

2) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ — kasr chiziqli funksiya (*x* va *y* o'zgaruvchilar; *a, b, c,* va *d* parametrlar);

3) $y = ax^2 + bx + c$ — kvadrat (funksiya) uchhad (*x* va *y* o'zgaruvchilar; *a, b, c* parametrlar);

4) $y = a^x$ — ko'rsatkichli funksiya (*x* va *y* o'zgaruvchilar; *a* parameter, $a > 0, \quad a \neq 1$);

5) $y = \log_a x$ — logarifmik funksiya (*x* va *y* o'zgaruvchilar; *a* parametr);

6) $ax = b$ — chiziqli tenglama (*x* noma'lum miqdor; *a* va *b* parametrlar);

7) $ax^2 + bx + c = 0$ — kvadrat tenglama (*x* noma'lum miqdor; *a, b* va *c* parametrlar);

8) $ax^4 + bx^2 + c = 0$ — bikvadrat tenglama (*x* noma'lum miqdor; *a, b* va *c* parametrlar);

9) $sinx = a$, $cosx = a$, $tgx = a$ va $ctgx = a$ — trigonometrik tenglamalar (*x* noma'lum miqdor; *a* parametr) va hokazo.

Parametr qatnashgan topshiriqlarni o‘rganishda ko‘pincha parametr(lar)ning mumkin bo‘lgan qiymatlari deyilgan tushunchaga duch kelinadi. Masalan, $y = a^x$ va $y \quad \log \ x$ funksiyalarda *a* parametrning mumkin bo‘lgan qiymatlari $a > 0$ va $a \neq 1$ dan iborat. $sinx = a$ va $cosx = a$ tenglamalarda esa a parametrning mumkin bo‘lgan qiymatlari $|a| \leq 1$ dan iborat. $y = kx$, $y = kx + b$ va $y = \frac{k}{x}$ larda parametr(lar) har qanday qiymatlar qabul qilsa, $\frac{1}{a-2} + \frac{1}{a-3}$ ifodada *a* parameter 2 va 3 dan farqli qiymatlarni qabul qiladi.

Umumiy o‘rta ta’lim maktablari va akademik litseylar matematika kursida o‘rganiladigan tenglamalar ichida kvadrat tenglamalar muhim o‘rin egallaydi. Chunki ko‘plab tenglamalarni yechish kvadrat tenglamani yechishga keltiradi. Shuning uchun ham o‘quvchilarga kvadrat tenglama, uning turlari va ularni yechish usullarini mukammal o‘rgatish zarur. O‘quvchilarda kvadrat tenglamalarni yechish bo‘yicha yetarlicha bilim va malakalar hosil qilingandan so‘ng ular bilan parametr qatnashgan kvadrat tenglamalar va ularni yechish usullariga to‘xtalish mumkin.

Parametr qatnashgan kvadrat tenglamalarni yechishda ko‘pincha $x^2 + px + q = 0$ keltirilgan kvadrat tenglama uchun yozilgan Viet teoremasidan foydalaniladi ($ax^2 + bx + c = 0$ tenglamani $x^2 + px + q = 0$ tenglamaga keltirishni o‘quvchilar biladilar).

Agar $x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ va $x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ lar $x^2 + px + q = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari bo‘lsa, u holda quyidagi teoremalar o‘rinlidir:

1. Agar tenglamada $p > 0,\ q > 0$ bo‘lsa, u holda uning ildizlari uchun $x_1 < x_2 < 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.
2. Agar tenglamada $p < 0,\ q > 0$ bo‘lsa, u holda uning ildizlari uchun $0 < x_1 < x_2$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.
3. Agar tenglamada $p > 0,\ q < 0$ bo‘lsa, u holda uning ildizlari uchun $x_1 < 0 < x_2$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.
4. Agar tenglamada $p < 0,\ q < 0$ bo‘lsa, u holda uning ildizlari uchun $x_1 < 0 < x_2$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.
5. Agar tenglamada $p > 0,\ q = 0$ bo‘lsa, u holda uning ildizlari uchun $x_1 < x_2 = 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.
6. Agar tenglamada $p > 0,\ q = 0$ bo‘lsa, u holda uning ildizlari uchun $0 = x_1 < x_2$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.
7. Agar tenglamada $p > 0,\ q < 0$ bo‘lsa, u holda uning ildizlari uchun $x_1 < 0 < x_2$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Bu teoremalar yordamida keltirilgan kvadrat tenglamani yechmasdan qachon uning har ikkala ildizi manfiy; har ikkala ildizi musbat; ildizlaridan biri manfiy, ikkinchisi musbat; bitta ildizi nolga teng, ikkinchisi musbat; bir ildizi nolga teng, ikkinchisi manfiy va qachon ildizlari qarama-qarshi sonlar bo‘lishini aniqlash mumkin. Masalan, $x^2 - 7x + 12 = 0$ tenglamada $p = -7 < 0$ va $q = 12 > 0$ bo‘lganligi uchun ikkinchi teoremaga asosan tenglamaning har ikkala ildizi musbat, $x^2 - 4x - 5 = 0$ tenglamada $p = -4 < 0$ va $q = -5 < 0$ bo‘lganligi uchun to‘rtinchi teoremaga asosan tenglamaning bitta ildizi manfiy, ikkinchi ildizi esa musbat bo‘ladi.

Ko‘rib o‘tilgan misollarda biz *p* va *q* ning tayin qiymatlarida tenglamaning ildizlari haqida fikr yuritdik. Agar berilgan tenglamada *p* va *q* ($ax^2 + bx + c = 0$ da *a, b, c*)lar tayin qiymatlar bilan berilgan bo‘lsa, u holda uning ildizlari *p* va *q* (*a, b, c*)larning qanday qiymatlar qabul qilishiga bog‘liq. Bu holda tenglama parametrli tenglama deb ataladi. Ko‘p hollarda berilgan kvadrat tenglamalarda yuqoridagi parametrlardan birigina qatnashadi. Quyida bunday tenglamalarga misollar keltiramiz:

1. *a* ning qanday qiymatlarida $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$ tenglamaning ildizlaridan biri ikkinchisidan ikki marta katta bo‘ladi?

Yechish: Viet teoremasidan foydalanamiz. Unga asosan:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(2a-1) \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2 \end{cases}$$

Sistemada $x_1 = 2x_2$ shartni e'tiborga olamiz. U holda

$$\begin{cases} 2x_2 + x_2 = -(2a-1) \\ 2x_2 \cdot x_2 = a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_2 = -(2a-1) \\ 2x_2^2 = a^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{1-2a}{3}, \\ 2x_2^2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasiga x_2 ning qiymatini qo'yamiz:

$$2 \cdot \left(\frac{1-2a}{3}\right)^2 = a^2 + 2, \quad \frac{2}{9}\left(1 - 4a + 4a^2\right) = a^2 + 2, \quad 2 - 8a + 8a^2 = 9a^2 + 18, \quad a^2 + 8a + 16 = 0,$$

$(a+4)^2 = 0$. Bundan *a* = – 4 kelib chiqadi.

Javob: – 4.

2. *a* ning qanday qiymatlarida $(a-1)x^2 + x + (a-2)(a^2+4) = 0$ tenglamaning ildizlari qarama-qarshi ishorali bo'ladi?

Yechish: Tenglamaning diskriminantini topamiz:

$D = b^2 - 4ac = 1 - 4(a-1)(a-2)(a^2+4)$ bo'lib u to'la kvadrat bo'lmaydi va ancha murakkab ko'rinishda. Shuning uchun tenglamaning ildizlarini topish va uni tekshirish ancha murakkab. Ammo tenglama ildizlari qarama-qarshi ishorali bo'lishi shartidan ularning ko'paytmasi, ya'ni $\dfrac{(a-2)(a^2+4)}{a-1}$ (Viet teoremasiga asosan) manfiy bo'lishi kerak. Demak, biz $\dfrac{(a-2)(a^2+4)}{a-1} < 0$ tengsizlikni yechishimiz kerak. $\dfrac{(a-2)(a^2+4)}{a-1} < 0$ da $a^2 + 4 > 0$ bo'lgani uchun oxirgi tengsizlikdan $\dfrac{a-2}{a-1} < 0$ ni (har ikkala tomonini $a^2 + 4$ ga bo'ldik) yozamiz. Uning yechimi esa $-1 < a < 2$ dan iborat.

Javob: $(-1;2)$.

3. *a* ning qanday qiymatlarida $x^2 - (3a+2)x + (2a^2 + a - 3) = 0$ tenglamaning har ikkala ildizi 1 dan katta bo'lmaydi?

Yechish: Kvadrat tenglamaning ildizlarini topish formulasidan foydalanamiz:

$$x_{1,2} = \frac{(3a+2) \pm \sqrt{(3a+2)^2 - 4(2a^2+a-3)}}{2} = \frac{(3a+2) \pm \sqrt{(a+4)^2}}{2} = \frac{(3a+2) \pm (a+4)}{2}.$$

Bundan $x_1 = 2a + 3$ va $x_2 = a - 1$ kelib chiqadi. Berilgan tenglama *a* ning har qanday qiymatlarida yechimga ega ekanligi ravshan. Masalaning shartiga asosan $x_{1,2} \le 1$, ya'ni

$$\begin{cases} 2a + 3 \le 1 \\ a - 1 \le 1 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a \le -1 \\ a \le 2 \end{cases}$$

bo'lishi kerak. Bundan esa $a \le -1$ kelib chiqadi.

Javob: $(-\infty; -1]$.

Amalda shunday misollar uchraydiki, ularni yuqorida keltirilgan teoremalar yordamida yechib bo'lmaydi yoki ancha murakkab irratsional tengsizliklarni yechishga olib keladi. Bunday hollarda quyidagi teoremalardan foydalanish qulay bo'ladi.

1. Kvadrat uchhadning har ikkala ildizlari biror *M* sondan kichik bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir:

$$\begin{cases} a>0, \\ D\ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a}<M, \\ f(M)>0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a<0, \\ D\ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a}<M, \\ f(M)<0. \end{cases}$$

2. Kvadrat uchhadning har ikkala ildizlari biror *M* sondan katta bo‘lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir:

$$\begin{cases} a>0, \\ D\ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a}<M, \\ f(M)>0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a<0, \\ D\ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a}<M, \\ f(M)<0. \end{cases}$$

3. Kvadrat uchhadning har ikkala ildizi *M* va *N* ($M<N$) sonlar oralig‘ida bo‘lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir:

$$\begin{cases} a>0, \\ D\ge 0, \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N, \\ f(M)>0, \\ f(N)>0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a<0, \\ D\ge 0, \\ M<-\dfrac{b}{2a}<N, \\ f(M)<0, \\ f(N)<0. \end{cases}$$

4. Kvadrat uchhadning bitta ildizi *M* sonidan kichik, ikkinchi ildizi esa *M* sonidan katta bo‘lishi uchun $a\cdot f(M)<0$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Quyida bu teoremalarni qo‘llashga oid misollar keltiramiz.

1. *m* ning qanday qiymatlarida $2x^2+mx+m^2-5=0$ tenglamaning har ikkala ildizi 1 dan kichik bo‘ladi?

Yechish: Birinchi teoremadan foydalanamiz:

$$\begin{cases} D=b^2-4ac=m^2-2\cdot 4\cdot\left(m^2-5\right)\ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{m}{4}<1, \\ 2\cdot 1^2+m\cdot 1+m^2-5>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7m^2+40\ge 0, \\ m>-4, \\ m^2+m-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2\le\dfrac{40}{7}, \\ m>-4, \\ m<\dfrac{-\sqrt{13}-1}{2},\ m>\dfrac{\sqrt{13}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\sqrt{\dfrac{40}{7}}\le m\le\sqrt{\dfrac{40}{7}}, \\ m>-4, \\ m<\dfrac{-\sqrt{13}-1}{2},\ m>\dfrac{\sqrt{13}-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[-\sqrt{\frac{40}{7}};\frac{-\sqrt{13}-1}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2};\sqrt{\frac{40}{7}}\right].$$

2. *a* ning qanday qiymatlarida $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ tenglamaning har ikkala ildizi $\dfrac{1}{2}$ dan katta bo‘ladi?

Yechish: Ikkinchi teoremadan foydalanamiz:

$$\begin{cases} D=b^2-4ac=9a^2-8a(2-a)\ge 0, \\ -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3a}{2(2-a)}>\dfrac{1}{2}, \\ (2-a)f\left(\dfrac{1}{2}\right)=(2-a)\left(\dfrac{2-a}{4}-\dfrac{3a}{2}+2a\right)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\left(a-\dfrac{16}{17}\right)\ge 0, \\ \dfrac{2(2a-1)}{2-a}>0, \\ (2-a)(2+a)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\le 0,\ a\ge \dfrac{16}{17}, \\ \dfrac{1}{2}<a<2, \\ -2<a<2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{16}{17}\le a<2.$$

Javob: $\dfrac{16}{17}\le a<2.$

3. *k* ning qanday qiymatlarida $x^2+2(k-3)x+9=0$ tenglamaning har ikkala ildizi $(-6;1)$ oraliqda bo‘ladi?

Yechish: Uchinchi teoremadan foydalanamiz:

$$\begin{cases} D=b^2-4ac=4(k-3)^2-36\ge 0, \\ f(-6)=(-6)^2-12(k-3)+9>0, \\ f(1)=1^2+2(k-3)+9>0, \\ -6<\dfrac{-2(k-3)}{2\cdot 1}<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k^2-24k\ge 0, \\ 81-12k>0, \\ 2k+4>0, \\ -6<3-k<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\le 0,\ k\ge 6, \\ k<\dfrac{27}{4}, \\ k>-2, \\ 2<k<9 \end{cases} \Rightarrow \left[6;\frac{27}{4}\right).$$

Javob: $\left[6;\dfrac{27}{4}\right).$

4. *a* ning qanday qiymatlarida $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5=0$ tenglamaning ildizlaridan biri 1 dan katta, ikkinchisi 1 dan kichik bo‘ladi?

Yechish: To‘rtinchi teoremadan foydalanamiz. Masala sharti bajarilishi uchun $f(1)<0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir. Unga asosan $f(1)=a^2+a+1++2a-3+a-5=a^2+4a-7$ bo‘lgani uchun $a^2+4a-7<0$ tengsizlik hosil bo‘ladi. Uni yechib, $-2-\sqrt{11}<a<-2+\sqrt{11}$ ni hosil qilamiz.

Javob: $\left(-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}\right).$

Ushbu maqolada keltirilgan va ularga o‘xshash parametr qatnashgan kvadrat tenglamalarni o‘rganish jarayonida o‘quvchilarning fikrlash doiralari kengayadi hamda ularning matematikaga bo‘lgan qiziqishlari yanada ortadi.

Adabiyotlar:

1. Alixonov S. Matematika o‘qitish metodikasi – T.: O‘qituvchi. – 2012.
2. Дыбов П.Т., Осколков В.А. Задачи по математике. – М., Оникс. – 2006.
3. A.Ahlimirzayev va boshq. Parametrli masalalar. – Andijon, 2014.

Андижон давлат университети,
2017 йил 5 январда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)