ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ДЛЯ КЛАССА УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИМИ СМЕШАННЫМ ОГРАНИЧЕНИЯМ

Г.М.МУМИНОВ

Ushbu maqolada optimal bosgaqruv nazariyasining asosi bo'lgan Pontryagin maksimum prinsipidan foydalanib koeffisiyetlari aralash cheklanishga ega bo'lgan $y''+u_1(t)y'+u_2(t)y=0$ *tenglama yechimlari tebranmasligining optimal oralig'ini aniqlovchi chegaraviy masala qurilgan.*

This paper includes the Pontryagin Maximum Principle of the Control Theory of solving the problems of the optimal boundary of defined disconjugate's distance for the equation $y''+u_1(t)y'+u_2(t)y=0)$ *with more general mixed constraints on the coefficients.*

Расмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$y''+u_1(t)y'+u_2(t)y=0 \quad (1)$$

где $u_1(t),\ u_2(t)$ -измеримые функции при $t\in R^1$.

Обозначим через Û множество всех измеримых вектор-функций $u(\cdot)=(u_1(\cdot),u_2(\cdot))$, удовлетворяющих при $t\in R^1$ следующему ограничению:

$$|u_1(t)|\le A,\ \int_{-\infty}^{+\infty}u_2^2(t)dt\le\rho^2, \quad (2)$$

где $A\ge 0,\ \rho>0$ -заданные числа.

Решением уравнения (I) называется непрерывно дифференцируемая функция $y(t),$ имеющая абсолютно непрерывную производную $y'(t)$ и удовлетворяющая уравению (1) почти всюду на R^1.

Расмотрим следующую экстремальную задачу : определить длину T максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (1), где $u(\cdot)\in$ Û.

Пусть T($u(\cdot)$)- множество правых концов всех промежутков неосцилляции уравнения (1) с общим левым концом в точке $t=0$ при фиксированных коэффициентах $u(\cdot)\in$ Û уравнения (1).

Тогда ясно, что для класса уравнений (1), где $u(\cdot)\in$ Û, имеет место равенство:

$$T=\inf\{T(u(\cdot)):u(\cdot)\in \hat{U}\ \} \quad (3)$$

При достаточно малом значении $b-a$ промежуток $[a,b)$ $(a<b)$ является промежутком неосцилляции для класса уравнений (1), где

$$|u_1(t)|\le A,\int_a^b u_2^2(t)dt\le\rho^2. \quad (4)$$

Действительно, имеет место следующая

Теорема 1.(Аналог неравенства Валле-Пуссена). Пусть дефференциальное уравнение (1) с измеримыми коэффициентами, удовлетворяющими условиям (4), имеет нетривиальное решение $y(t)$, обладающее двумя нулями в точках $t=a$ и $t=b$, где $a<b$. Тогда справедливо неравенство:

$$\frac{\rho h^{3/2}}{2h}+\frac{Ah}{\pi}-1\ge 0, \quad (5)$$

где $h=b-a.$

Доказательство. Пусть $y(a)=y(b)=0,$ тогда из равенств

$$y(t)=\int_a^t y'(s)ds,\quad y(t)=-\int_t^b y'(s)ds$$

получаем, что

$$|y(t)|\le\int_a^t|y'(s)|ds,\le\sqrt{t-a}\left(\int_a^t y'^{\,2}(s)ds\right)^{1/2},$$

$$|y(t)|\le\int_t^b|y'(s)|ds,\le\sqrt{b-t}\left(\int_t^b y'^{\,2}(s)ds\right)^{1/2},$$

Сложив оба неравенства и принимая во внимание, что

$$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}\le\sqrt{(a_1+a_2)(b_1+b_2)},\quad a_i\ge 0,\ b_i\ge 0,\ i=1,2,$$

получаем

$$|y(t)|\le\frac{\sqrt{b-a}}{2}\left(\int_a^b y'^{\,2}(s)ds\right)^{1\backslash 2},\quad a\le t\le b.\ (6)$$

Теперь, умножив обе части уравнения (1) на $y(t)$ и интегрируя на отрезке $[a,b]$, имеем:

$$\int_a^b y''(t)y(t)dt+\int_a^b u_1(t)y'(t)y(t)dt+\int_a^b u_2(t)y^2(t)dt=0$$

Учитивая граничные условия $y(a)=y(b)=0,$ отсюда получаем

$$\int_a^b y'^{\,2}(t)dt=\int_a^b u_1(t)y'(t)y(t)dt+\int_a^b u_2(t)y^2(t)dt,\qquad (7)$$

Используя неравенство Виртингера

$$\int_a^b y^2(s)ds\le\left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2\cdot\int_a^b y'^{\,2}(s)ds.\ (8)$$

и неравенство (6), оценим каждый интеграл правой части равенства (7). Имеем:

$$\left|\int_a^b u_1(t)y'(t)y(t)dt\right|\le A\int_a^b|y(t)|\cdot|y'(t)|dt\le A\left(\int_a^b y^2(t)dt\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b y'^{\,2}(t)dt\right)^{1/2},$$

$$\left|\int_a^b u_1(t)y'(t)y(t)dt\right|\le\frac{Ah}{\pi}\int_a^b y'^{\,2}(t)dt.\ (9)$$

Второй интеграл в (7) оценим следующим образом:

$$\left|\int_a^b u_2(t)y^2(t)dt\right|\le\int_a^b|u_2(t)y(t)|\cdot|y(t)|dt\le\left(\int_a^b u_2{}^2(t)y^2(t)dt\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b y^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

Отсюда, согласно неравенствам (6) и (8), имеем

$$\left|\int_a^b u_2(t)y^2(t)dt\right|\le\frac{\rho h^{3/2}}{2\pi}\int_a^b y'^{\,2}(t)dt\quad(10)$$

Из равенства (7) с учетом неравенств (9), (10) получаем

$$t \in [0,\tau] \quad (11)$$

В силу нетривиальности решения $y(t)$ уравнения (1), ясно, что

$$\int_a^b y'^2(t)dt > 0.$$

Поэтому, из неравенства (11) получаем (5). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что величина T для класса уравнений (1), где $u(\cdot) \in$ Ù, положительна.

Согласно теореме 1, задача отыскания длины T максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (1) при Ù сводится к следующей задаче оптимального управления : для управляемого объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -u_2 x_1 - u_1 x_2, \end{cases} \qquad u(\cdot) \in \text{Ù} \quad (12)$$

с начальным состоянием $x(0) = (0,1)$ и терминальным множеством $M = \{x \in R^2 : x_1 = 0, x_2 < 0\}$ нужно найти время оптимального быстродействия $\tau > 0$ на классе допустимых управлений из Ù.

Возникает вопрос: существует ли хотя бы одно допустимое управление $u(\cdot) \in$ Ù, осуществляющее перевод точки $x(t)$ из начального состояния (0,1) на множество M согласно системе (12)? Ответ положительный. Действительно, выберем управление $u(t)$ следующим образом:

$$u_1(t) = 0, \qquad t \in R^1$$

$$u_2(t) = \begin{cases} \left(\rho^4/\pi^2\right)^{1/3}, & \text{если } t \in \left[0, \left(\pi^4/\rho^2\right)^{1/3}\right] \\ 0, & \text{если } t \notin \left[0, \left(\pi^4/\rho^2\right)^{1/3}\right] \end{cases}$$

Тогда соответствующее решение системы (12) с начальным условием $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1$ имеет вид:

$$x_1(t) = \left(\frac{\pi}{\rho^2}\right)^{1/3} \sin\left[\left(\frac{\rho^2}{\pi}\right)^{1/3} \cdot t\right], \qquad x_2(t) = \cos\left[\left(\frac{\rho^2}{\pi}\right)^{1/3} \cdot t\right].$$

Отсюда при $t = \left(\frac{\pi^4}{\rho^2}\right)^{1/3}$ имеем, что $x\left(\left(\frac{\pi^4}{\rho^2}\right)^{1/3}\right) = (0,-1) \in M$, $\int_{-\infty}^{+\infty} u_2^2(t)dt = \rho^2$, то есть $u(\cdot) \in$ Ù. Таким образом, существует функция $u(\cdot) \in$ Ù, для которой $T(u(\cdot)) < +\infty$.

Лемма 1. Пусть $u(\cdot) \in$ Ù. Тогда для решения $x(t)$ системы (12) с начальным условием $x(0) = (0,1)$ при $0 \le t \le h$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\le h\exp\left[h\left(A + \rho\sqrt{h}\right)\right], \\ |x_2(t)| &\le \exp\left[h\left(A + \rho\sqrt{h}\right)\right], \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство**. Запишем уравнение системы (12) с учетом начальных условий в интегральной форме**:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^t x_2(s)ds, \\ x_2(t) &= 1 - \int_0^t \left[u_2(s)x_1(s) + u_1(s)x_2(s)\right]ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^t u_2(s)x_1(s)ds = \int_0^t \left(\int_s^t u_2(\tau)d\tau \right) x_2(s)ds.$$

Следовательно,

$$x_2(t) = 1 - \int_0^t \left[u_1(s) + \int_s^t u_2(\tau)d\tau \right] x_2(s)ds /$$

Отсюда нетрудно получить оценку для $|x_2(t)|$:

$$|x_2(t)| \le 1 + \int_0^t \left(A + \rho\sqrt{h-s}\right)|x_2(s)|ds, \quad 0 \le t \le h,$$

или

$$|x_2(t)| \le 1 + \left(A + \rho\sqrt{h}\right)\int_0^t |x_2(s)|ds, \quad 0 \le t \le h,$$

Применив лемму Гронуолла-Беллмана , при $0 \le t \le h$ имеем:

$$|x_2(t)| \le \exp\left[h(A + \rho\sqrt{h})\right] \quad (15)$$

Из (14) и (15) получаем оценку (13). Лемма доказана.

Теперь, используя лемму 1, можно доказать следующую.

Теорема 2. В рассматриваемой задаче оптимального управления существует оптимальное по быстродействию измеримое управление $u(\cdot) \in$ Ù. соединяющее начальную точку (0, 1) фазовой плоскости с терминальным множеством M по траектории системы (12) за кратчайшее время $\tau > 0$.

Доказательство. Пусть $(x^k(\cdot),\ u^k(\cdot))$, $k = 1,2,3.....$ минимизирующая последовательность, где $u(\cdot) \in$ Ù; $x_1^{\,k}(0) = 0,\ x_2^{\,k}(0) = 1;\ x_1^{\,k}(t^k) = 0$, $x_2^{\,k}(t^k) < 0$, t^k – последовательность времен, монотонно убывающая и стремящаяся при $k \to +\infty$ к $\tau > 0$ – инфимуму изучаемого функционала при описанных ограничениях. Согласно лемме 1, при $0 \le t \le \tau$ последовательность $\{x^k(t)\},\ k = 1,2,...$ равномерно ограничена и для любых $t_1, t_2, \in [0,\tau]$, где $t_1 \le t_2$, выполняется

$$\left|x_2^{\,k}(t_2) - x_2^{\,k}(t_1)\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_2^{\,k}(s)ds\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \left|u_1^{\,k}(s)x_2^{\,k}(s) + u_2^{\,k}(s)x_1^{\,k}(s)\right|ds \le$$

$$\le A\int_{t_1}^{t_2} \left|x_2^{\,k}(s)\right|ds + \rho\left(\int_{t_1}^{t_2} \left|x_1^{\,k}(s)\right|^2 ds\right)^{1\backslash 2} \le AM_0(t_2 - t_1) + \rho M_0\sqrt{t_2 - t_1},$$

и $$\left|x_1^{\,k}(t_2) - x_1^{\,k}(t_1)\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}_1^{\,k}(s)ds\right| \le \int_{t_1}^{t_2} \left|x_2^{\,k}(s)\right|ds \le M_0(t_2 - t_1),$$

где $k = 1,2,....,\ M_0 = \exp\left[\tau\left(A + \rho\sqrt{\tau}\right)\right]$ (см. (15),), то есть последовательность $\{x^k(t)\}$ равностепенно непрерывна.

Согласно теореме Арцела ,из нее можно выделить равномерно сходящуюся к некоторой непрерывной функции $x^*(t)$ на отрезке $[0,\tau]$ подпоследователь-ность решений системы (12).Без ограничения общности мы можем считать, что сама последовательность $\{x^k(t)\}$ сходится равномерно на $[0,\tau]$ к $x^*(t)$, причем

$$x_1^*(0) = 0, x_2^*(0) = 1; x_1^*(\tau) = 0, x_2^*(\tau\ ) \le 0.$$

Теперь покажем , что $x^*(t)$ является решением системы (12) при некотором допустимом управлении

$u^*(t)$ на $[0,\tau]$. При $t \in [0,\tau]$ имеем:

$$x_2^*(t) = \lim_{k\to+\infty} x_2^k(t) = 1 - \lim_{k\to+\infty} \int_0^t \left[u_1^k(s)x_2^k(s) + u_2^k(s)x_1^k(s)\right]ds =$$

$$= 1 - \lim_{k\to\infty}\left[\int_0^t \left(x_2^k(s) - x_2^*(s)\right)u_1^k(s)ds + \int_0^t \left(x_1^k(s) - x_1^*(s)\right)u_2^k(s)ds + \int_0^t \left(u_1^k(s)x_2^*(s) + u_2^k(s)x_1^*(s)\right)ds\right].$$

Поскольку:

$$\left|\int_0^t \left(x_2^k(s) - x_2^*(s)\right)u_1^k(s)ds\right| \le A\tau \max_{t\in[0,\tau]}\left|x_2^k(t) - x_2^*(t)\right|,$$

$$\left|\int_0^t \left(x_1^k(s) - x_1^*(s)\right)u_2^k(s)ds\right| \le \rho\sqrt{\tau} \max_{t\in[0,\tau]}\left|x_1^k(t) - x_1^*(t)\right|,$$

то

$$x_2^*(t) = 1 - \lim_{k\to+\infty} \int_0^t \left[u_1^k(s)x_2^*(s) + u_2^k(s)x_1^*(s)\right]ds$$

Поскольку совокупность всех функций $\{u^k(\cdot)\}$ принадлежит некоторому шару пространства L_2, то из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Мы будем считать, что сама последовательность $\{u^k(\cdot)\}$ слабо сходится к некоторой функции $u^*(\cdot)$.Согласно вышесказанному, имеем

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^t \left[u_1^k(s) - u_1^*(s)\right]x_2^*(s)ds = 0,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^t \left[u_2^k(s) - u_2^*(s)\right]x_1^*(s)ds = 0.$$

Теперь нетрудно видеть , что функции $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$x_1^*(t) = \int_0^t x_2^*(s)ds,$$

$$x_2^*(t) = 1 - \int_0^t \left[u_2^*(s)x_1^*(s) + u_1^*(s)x_2^*(s)\right]ds,$$

которая равносильна (12).

Можно показать , что $|u_1^*(t)| \le A$ п.в. на $[0,\tau]$ и $\int_0^\tau u_2^{*2}(t)dt \le \rho^2$.Так как уравнение (12) является линейным векторным однородным уравнением при $u_1 = u_1^*(t), u_2 = u_2^*(t)$, то $x_2^*(\tau) < 0$ и, следовательно, $x^*(\tau) \in M$.Теорема доказана.

Нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть τ -время , за которое оптимальное управление переводит соответствуюшую ему траекторию системы (12) из точки (0,1) на терминальное множество М.Тогда имеет место равенство: T= τ .

Пользуясь игольчатой вариацией, можно показать , что принцип максимума для сформулированной выше задачи оптимального быстродействия имеет силу.

Теперь, используя принцип максимума Понтрягина [1,2] , выводим аналог уравнения Эйлера из вариационного исчисления для рассматриваемой задачи теории неосцилляции. (Для определения величины Т для класса уравнений (1) при $u(\cdot) \in$ Ù будет построена двухточечная краевая задача).Справедлива следующая.

Теорема 4. Длина Т максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (1) при $u(\cdot) \in$ Ù характеризуется тем , что разрешима следуюшая краевая задача:

$$y'' + Ay' + \frac{\rho \exp(At) y^3}{\left(2 \int_0^{T/2} \exp(2As) y^4(s) ds \right)^{1/2}} = 0 \text{ ,(16)}$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y'(T/2) = 0 \text{ . (17)}$$

Доказательство. Введем новую переменную $x_3(t)$,положив $x_3(t) = \int_0^t u_2^2(\tau) d\tau$.Тогда ясно ,что $\dot{x}_3 = u_2^2, x_3(0) = 0, x_3(T) \le \rho^2$,и сформулированная выше здача оптимального быстродействия эквивалентна следующей задаче: найти допустимое управление $\tilde{u}(\cdot) \in$ Ù такое , что соответствующее ему решение $\tilde{x}(t)$ системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -u_2 x_1 - u_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = u_2^2 \end{cases} \text{ (18)}$$

с начальным условием $\tilde{x}(0) = (0,1,0)$ попадает на множество

$$\tilde{M} = \left\{ x \in R^3 : x_1 = 0, x_2 < 0, x_3 \le \rho^2 \right\}$$

за наименьшее время $\tau > 0$,которое совпадает с Т.Согласно принципу максимума Понтрягини , для оптимальности управления $u^*(t), 0 \le t \le T$, необходимо существование такой абсолютно непрерывной вектор функции $\tilde{\psi}(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ и постоянной $\psi_0 \le 0$,что, во-первых, вектор $(\psi_0, \tilde{\psi}(t))$ ненулевой для всех $t \in [0,T]$, где $\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)$ -решение сопряженной системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = u_2^*(t) \psi_1 \\ \dot{\psi}_2 = u_1^*(t) \psi_2 - \psi_1 \\ \dot{\psi}_3 = 0 \end{cases} \text{ (19)}$$

и , во-вторых, почти всюду на отрезке $[0,T]$ выполнено условие максимума

$$\sup_{\substack{|u_1| \le A \\ u_2 \in R^1}} H(\psi_0, \tilde{\psi}(t), \tilde{x}^*(t), u) = H(\psi_0, \tilde{\psi}(t), \tilde{x}^*(t), u^*(t)) \equiv 0 \text{ ,(20)}$$

где

$$H(\psi_0, \tilde{\psi}, u, \tilde{x}) = \psi_0 + \psi_1 x_2 - \psi_2 (u_2 x_1 + u_1 x_2) + \psi_3 u_2^2$$

Кроме того, выполнено условия трансверсальности на правом конце траектории $\tilde{x}^*(t)$:

А) $\psi_2(T) = \psi_3(T) = 0$, если $x_3^*(T) < \rho^2$

Б) $\psi_2(T) = 0$, если $x_3^*(T) = \rho^2$.

Используя уравнения (18), (19), почти всюду на [0,T] имеем :

$$\frac{d}{dt} < \tilde{x}^*(t), \tilde{\psi}(t) >= \frac{d}{dt} \left(x_1^*(t) \psi_1(t) + x_2^*(t) \psi_2(t) + x_3^*(t) \psi_3(t) \right) = \psi_3(t) u_2^{*2}(t)$$

Далее ,учитывая, что $\overset{\circ}{\psi}_3 = 0$, имеем $\psi_3(t) \equiv \mu = const$.Следовательно,почти всюду на [0,T].

$$\frac{d}{dt} \left(x_1^*(t) \psi_1(t) + x_2^*(t) \psi_2(t) + \mu x_3^*(t) \right) = \mu u_2^{*2}(t)$$

После интегрирования имеем

$$x_1^*(t)\psi_1(t)+x_2^*(t)\psi_2(t)\equiv C,\quad 0\le t\le T\ .$$

Положив $t=T$, с учетом $x_1^*(T)=\psi_2(T)=0$,получаем: $x_1^*(t)\psi_1(t)+x_2^*(t)\psi_2(t)\equiv 0,\quad 0\le t\le T$ (21) Максимум в (20) по переменному u_2 достигается , если выполнено необходимое условие экстремума $\partial H/\partial u_2=0$, то есть

$$2\psi_3(t)u_2^*(t)-\psi_2(t)x_1^*(t)=0,\quad 0\le t\le T\ .\ (22)$$

Рассмотрим случай а) ,когда $x_3^*(T)<\rho^2$.В этом случае нетрудно видеть , что $\psi_3(t)\equiv 0,$ и из (22) следует , что $\psi_2(t)\equiv 0,$ а это влечет за собой (см.(21)) $\psi_1(t)\equiv 0$.Тогда из (20) следуют, что $\psi_0=0$.Таким образом , $\psi_0=\psi_1(t)=\psi_2(t)=\psi_3(t)\equiv 0,$,что противоречит нетривиальности вектора $(\psi_0,\tilde{\psi}(t))$.

Таким образом , показано,что

$$\int_0^\tau u_2^{*2}(t)dt=\rho^2\ (23)$$

Вышеприведенные рассуждения показывают , что $\psi_3(t)\equiv\mu\neq 0$.

Максимум в (20) по переменной u_2 достигается , когда $\mu<0$. Из (22) находим компоненту $u_2^*(t)$ оптимального управления $u^*(t)$, которая имеет вид

$$u_2^*(t)=\frac{\psi_2(t)x_1^*(t)}{2\mu}\ (24)$$

(здесь и далее оптимальное управление $u_2^*(t)$ подвергнуто перестройке на множестве меры нуль так, что $u_2^*(t)$ стала непрерывной функцией).

Докажем , что $\psi_0\neq 0$.Предположим противное: пусть $\psi_0=0$.Тогда из (20) и (24) при $t=T$ следует , что $\psi_1(T)x_2^*(T)=0$. Но так как $x_2^*(T)<0$, то $\psi_1(T)=0$. Теперь из $\psi_1(T)=\psi_2(T)=0$ и из (19) получим , что $\psi_1(T)=\psi_2(T)=0$, $0\le t\le T$.Тогда из (24) следует , что $u_2^*(t)\equiv 0$, $0\le t\le T$.Получили противоречие с тем , что $\int_0^\tau u_2^{*2}(t)dt=\rho^2>0$.Следовательно , $\psi_0\neq 0$ и можно положить $\psi_0=-1$.Далее , при $t=0$ из соотношения (21) следует , что $\psi_2(0)=0$,а , в свою очередь , из (20) следует , что $\psi_1(0)=1$.

Теперь докажем , что $\psi_2\neq 0,\ t\in(0,T)$.Предположим противное: пусть $\psi_2(\xi)=0$ для некоторого $\xi\in(0,T)$.Тогда из (21) при $t=\xi$ имеем $\psi_1(\xi)=0$,следовательно, $\psi_1(T)=\psi_2(T)\equiv 0$, $t\in[0,T]$,отсюда (см (24)) $u_2^*(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$.Получили противоречие тому, что $\int_0^\tau u_2^2(t)dt=\rho^2>0$.Таким образом, функци $\psi_2(t)$ сохраняет свой знак на интервале (0,T).

Из $\psi_2(0)=0$, $\psi_1(0)=1$ и из второго уранения системы (19) следует , что

$$\psi_2(t)<0,\ 0<t<T\ .(25)$$

Соотношния (24) и(25) показывают , что $u_2^*(t)>0$, $t\in(0,T)$ и $u_2^*(t)$ является непрерывной функцией на $[0,T]$ (после перестройки на множестве меры нуль). Тогда согласно лемме 1, производная $y'(t)=x_2^*(t)$ имеет только один нуль на интервале (0,T).Обозначим его через θ ,то есть $y'(\theta)=x_2^*(\theta)=0$.

Из вышеприведенных рассуждений ясно , что максимум по переменной u_1 в соотношении (20) достигается на кусочно-постоянных функциях ,а именно:

$$u_1^*(t)=A\operatorname{sgn}x_2^*(t)\,,0\le t\le T\ (26)$$

(здесь и далее $u_1^*(t)$ подвергается перестройке на множестве меры нуль).Согласно (24),(26),(12),(19) имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = x_2^*, \\ \dot{x}_2^* = -u_2^*(t)x_1^* - Ax_2^*, \quad 0 \le t < \theta \end{cases} \quad (27)_1$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1^* = x_2^*, \\ \dot{x}_2^* = -u_2^*(t)x_1^* + Ax_2^*, \quad \theta < t \le T \end{cases} \quad (27)_2$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = u_2^*(t)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = A\psi_2 - \psi_1, \quad 0 \le t < \theta \end{cases} \quad (28)_1$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = u_2^*(t)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -A\psi_2 - \psi_1, \quad \theta < t \le T \end{cases} \quad (28)_2$$

Из соотношений (27) и (28) и непрерывности $u_2^*(t), 0 \le t \le T$ ясно , что функции $\psi_2(t)$ и $x_2^*(t)$ кусочно-гладкие , и они имеют непрерывные производные на $[0,T]$, за исключением точки $t = \theta$. Поэтому из (27) , (28) следует, что

$$\ddot{x}_1^* + A\dot{x}_1^* + u_2^*(t)x_1^* = 0, \quad 0 \le t < \theta \quad , \quad (29)_1$$

$$\ddot{\psi}_2 - A\dot{\psi}_2 + u_2^*(t)\psi_2 = 0, \quad 0 < t < \theta \quad (29)_2$$

и

$$\ddot{x}_1^* - A\dot{x}_1^* + u_2^*(t)x_1^* = 0, \quad \theta < t \le T \quad , \quad (30)_1$$

$$\ddot{\psi}_2 + A\dot{\psi}_2 + u_2^*(t)\psi_2 = 0, \quad \theta < t \le T \quad . \quad (30)_2$$

Умножив $(29)_1$ на $\psi_2(t)$, а $(29)_2$ $x_1^*(t)$ и сложив эти равенства , имеем :

$$\ddot{x}_1^*\psi_2 - x_1^* \cdot \ddot{\psi}_2 + A(\dot{x}_1^*\psi_2 + x_1^*\dot{\psi}_2) = 0, \quad 0 \le t < \theta \quad .(31)_1$$

Аналогично из $(30)_1$ и $(30)_2$ получаем , что

$$\ddot{x}_1^*\psi_2 - x_1^* \cdot \ddot{\psi}_2 - A(\dot{x}_1^*\psi_2 + x_1^*\dot{\psi}_2) = 0, \quad \theta < t \le T \quad . \quad (31)_2$$

После интегрирования уравнений $(31)_1$ и $(31)_2$ с учетом краевых значений $x_1^*(t)$, $\psi_2(t)$, получаем соответственно:

$$\dot{x}_1^*\psi_2 - x_1^* \cdot \dot{\psi}_2 + Ax_1^*\psi_2 = 0, \quad 0 \le t < \theta \quad (32)_1$$

и

$$\dot{x}_1^*\psi_2 - x_1^* \cdot \dot{\psi}_2 - Ax_1^*\psi_2 = 0, \quad \theta < t \le T \quad (32)_2$$

Из $(32)_1$ и $(32)_2$ после интегрирования получаем , что

$$\psi_2(t) = C_1 x_1^*(t)e^{At}, \quad 0 \le t < \theta \quad (33)_1$$

и

$$\psi_2(t) = C_2 x_1^*(t)e^{-At}, \quad \theta < t \le T \quad . \quad (33)_2$$

Так как $\psi_2(t)$ абсолютно непрерывная функция ,то C_1 и C_2 связаны равенством $C_2 = C_1 e^{2A\theta}$. Дифференцируя $(33)_1$, имеем :

$$\dot{\psi}_2(t) = (C_1\dot{x}_1^*(t) + AC_1x_1^*(t))e^{At}$$

Отсюда с учетом $\dot{\psi}_2(0) = -\psi_1(0) = -1, x_1^*(0) = 0, \dot{x}_1^*(0) = x_2^*(0) = 1$, получаем , что C_1= -1. Следовательно ,

$$\psi_2(t) = \begin{cases} -x_1^*(t)e^{At}, & 0 \le t \le \theta, \\ -x_1^*(t)e^{-A(t-2\theta)}, & \theta \le t \le T \end{cases} .$$

Подставив выражение для $u_2^*(t)$ в (24) , получаем

$$u_2^*(t) = -\frac{1}{2\mu}\begin{cases} x_1^{*2}(t)e^{At}, & 0 \le t \le \theta, \\ x_1^{*2}(t)e^{-A(t-2\theta)}, & \theta \le t \le T \end{cases} \quad (34)$$

Согласно (26), (34), уравнение (1) (после замены переменных $x_1^* = y$, $x_2^* = y'$) имеет вид

$$y'' + Ay' - \frac{1}{2\mu} e^{At} y^3 = 0, \quad 0 \le t \le \theta,$$

$$y'' - Ay' - \frac{1}{2\mu} e^{-A(t-2\theta)} y^3 = 0, \quad \theta \le t \le T. \quad (35)$$

Введем функцию $\varphi(t) = y(t+\theta)$. Тогда (35) примет вид:

$$\varphi'' + A\varphi' - \frac{1}{2\mu} e^{A(t+\theta)} \varphi^3 = 0, \quad -\theta \le t \le 0,$$

$$\varphi'' - A\varphi' - \frac{1}{2\mu} e^{-A(t-\theta)} \varphi^3 = 0, \quad 0 \le t \le T-\theta, \quad (36)$$

причем

$$\varphi'(T-\theta) < 0, \varphi(-\theta) = 0, \varphi'(-\theta) = 1, \varphi'(0) = 0, \varphi(T-\theta) = 0. \quad (37)$$

Объединив оба уравнения (36) в одно , имеем:

$$\varphi'' + A|\varphi'| - \frac{1}{2\mu} e^{A(\theta-|t|)} \varphi^3 = 0, \quad -\theta \le t \le T-\theta \ . (38)$$

Теперь покажем , что $T = 2\theta$.

Заметим , что решение $\varphi(t)$ уравнения (38) симметрично относительно оси $t = 0$. Действительно , если $\varphi = \chi(t)$ решение уравнения (38) ,то $\varphi = \chi(-t)$ также является решением уравнения (38).Поэтому положительное решение $\varphi(t)$ краевой задачи (38), (37) при $t \ge 0$ удовлетворяет также следующим краевым условиям: $\varphi(\theta) = 0$, $\varphi'(\theta) = 1$. Из соображений симметрии следует, что $T - \theta = \theta$, то есть $T = 2\theta$.

Остается определить неизвестную постоянную $\mu < 0$.В силу замены $\varphi(t) = y(t+\theta)$ из (34) имеем:

$$v(t) = u_2^*(t+\theta) = -\frac{e^{A\theta}}{2\mu} \begin{cases} \varphi^2(t) e^{At}, & -\theta \le t \le 0, \\ \varphi^2(t) e^{-At}, & 0 \le t \le \theta. \end{cases}$$

Поэтому согласно (23) получим :

$$\rho^2 = \int_0^T u_2^{*2}(t)dt = \int_{-\theta}^{\theta} u_2^*(t+\theta)^2 dt = \int_{-\theta}^{\theta} v^2(t)dt = \frac{e^{2A\theta}}{4\mu^2} \int_{-\theta}^{\theta} e^{-2A|s|} ds.$$

Отсюда

$$-\frac{1}{2\mu} = \frac{\rho \exp(-A\theta)}{\left(\int_{-\theta}^{\theta} \exp(-2A|s|) \varphi^4(s) ds \right)^{1/2}}. \quad (39)$$

Из (38) и (39) следует , что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\varphi'' + A|\varphi'| + \frac{\rho \exp(-A|t|) \varphi^3}{\left(\int_{-\theta}^{\theta} \exp(-2A|s|) \varphi^4(s) ds \right)^{1/2}} = 0, \quad (40)$$

и краевым условиям

$$\varphi(-\theta) = 0, \varphi'(-\theta) = 1, \varphi'(0) = 0, \varphi(\theta) = 0, \varphi'(\theta) = -1 \quad (41)$$

Из приведенного выше анализа следует , что достаточно рассматреть краевую задачу (40), (41) на отрезке $-\theta \le t \le 0$. Отсюда, как нетрудно видеть . вытекает утверждение теоремы.

Теорема 5. Пусть Λ -множество чисел $\gamma > 0$ для которых разрешима краевая задача (16),(17) (с заменой T на γ).Тогда имеет место равенство : $\min\{\gamma : \gamma \in \Lambda\} = T$.

Доказательсто. Для того ,чтобы убедится в том ,что $\inf\{\gamma : \gamma \in \Lambda\} > 0$, рассмотрим слудующую краевую задачу (с заменой T на γ) на отрезке $[-\gamma/2, \gamma/2]$:

$$\varphi'' + A|\varphi'| + \frac{\rho \exp(-A|t|) \varphi^3}{\left(2\int_{-\gamma/2}^{0} \exp(-2A|s|) \varphi^4(s) ds \right)^{1/2}} = 0, \quad (42)$$

$$\varphi(-\gamma/2)=\varphi(\gamma/2)=0,\varphi'(-\gamma/2)=-\varphi'(\gamma/2)=1,\varphi'(0)=0 \quad (43)$$

При $\gamma\in\Lambda$ краевая задача (42), (43) имеет решение в силу теоремы существовония и единственности и следующего свойства: если $y(t)$ является решением краевой задачи (16),(17) при T= γ на отрезке $[0,\gamma/2]$ то функция $y(-t)$ на отрезке $[-\gamma/2,0]$ удовлетворяет уравнению

$$y''-Ay'+\frac{\rho\exp(-At)y^3}{\left(2\int\limits_{-\gamma/2}^{0}\exp(-2A|s|)y^4(s)ds\right)^{1/2}}=0,$$

и краевым условиям $y'(\gamma/2)=0, y(\gamma)=0, y'(\gamma)=-1.$

Умножив обе части уравнения (42) на $\varphi(t)$ и интегрируя на отрезке $[-\gamma/2,\gamma/2]$, имеем:

$$\int\limits_{-\gamma/2}^{\gamma/2}\varphi'^2(s)ds=A\int\limits_{-\gamma/2}^{\gamma/2}\varphi(s)|\varphi'(s)|ds+\frac{\rho\cdot\int\limits_{-\gamma/2}^{\gamma/2}\exp(-A|s|)\varphi^4(s)ds}{\left(\int\limits_{-\gamma/2}^{\gamma/2}\exp(-2A|s|)\varphi^4(s)ds\right)^{1/2}}$$

Используя неравенства (6) ,(7), отсюда после несложных выкладок получим

$$\frac{\rho\gamma^{3/2}}{2\pi}+\frac{A\gamma}{\pi}-1\ge 0\cdot$$

Отсюда $\gamma\ge\xi_0$,где ξ_0 -положительный корнь уравнения

$$\frac{\rho\gamma^{3/2}}{2\pi}+\frac{A\gamma}{\pi}-1=0\cdot$$

Следовательно, $\inf\{\gamma:\gamma\in\Lambda\}\ge\xi_0>0$.

Предположим,что $\inf\{\gamma:\gamma\in\Lambda\}=\gamma_0<T$, то есть существует $\gamma_1\in\Lambda$ такое , что $\gamma_1<T$.Этому γ_1 отвечает решение краевой задачи (16) , (17) $\tilde{y}(t)$ на отрезке $[0,\gamma/2]$.Рассмотрим пару функций:

$$\tilde{u}_1(t)=\begin{cases}A, & если \quad 0\le t\le\gamma_{1/2},\\ -A, & если \quad \gamma_{1/2}\le t\le\gamma_1,\\ 0, & если \quad t\notin[0,\gamma_1]\end{cases}$$

$$\tilde{u}_2(t)=\begin{cases}\dfrac{\rho\exp(At)\tilde{y}^2(t)}{\left(2\int\limits_0^{\gamma_{1/2}}\exp(2As)\tilde{y}^4(s)ds\right)^{1/2}}, & если \quad 0\le t\le\gamma_{1/2},\\ \dfrac{\rho\exp(-At)\tilde{y}^2(t)}{\left(2\int\limits_{\gamma_{1/2}}^{\gamma_1}\exp(-2As)\tilde{y}^4(s)ds\right)^{1/2}}, & если \quad \gamma_{1/2}\le t\le\gamma_1,\\ 0, & если \quad t\notin[0,\gamma_1]\end{cases}$$

где решение $\tilde{y}(t)$ продолжено на отрезке $[\gamma_{1/2},\gamma_1]$ с помощью равенства $\tilde{y}(t)=y(\gamma_1-t)$.

Теперь покажем , что функции $\tilde{u}_1(t),\tilde{u}_2(t)$ при $t\in R^1$ являются допустимыми в рассматриваемой зада

че теории неосцилляции. Имеем: $|\tilde{u}_1(t)| \le A,\ t \in R^1$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_2^2(t)dt = \int_0^{\gamma_1} \tilde{u}_2^2(t)dt = \int_0^{\gamma_{1/2}} \tilde{u}_2^2(t)dt + \int_{\gamma_{1/2}}^{\gamma_1} \tilde{u}_2^2(t)dt = \int_0^{\gamma_{1/2}} \frac{\rho^2 \exp(2At)\tilde{y}^4(t)dt}{\left[2\int_0^{\gamma_{1/2}} \exp(2As)\tilde{y}^4(s)ds\right]} +$$

$$+ \int_{\gamma_{1/2}}^{\gamma_1} \frac{\rho^2 \exp(-2At)\tilde{y}^4(t)dt}{\left[2\int_{\gamma_{1/2}}^{\gamma_1} \exp(-2As)\tilde{y}^4(s)ds\right]} \le \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} = \rho^2 .$$

Следовательно, функции $\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t)$ являются допустимой парой, то есть $\tilde{u}(\cdot) = (\tilde{u}_1(\cdot), \tilde{u}_2(\cdot)) \in$Ù. Но тогда должно быть $\gamma_1 > T$.Полученное противоречие доказывает теорему.

Если в рассматриваемой задаче теории неосцилляции вместо класса измеримых функций Ù рассмотреть класс измеримых функций Ù$_\alpha$ $(\alpha > 1)$, где

$$\text{Ù}_\alpha: |u_1(t)| \le A, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |u_2(t)|^\alpha dt \le \rho^2, t \in R^1 \text{ (43)}$$

то рассуждениями , аналогичными изложенным выше (с помощью принципа максимума) ,можно вывести следующее соотношение:

$$\mu\alpha \left|u_2^*(t)\right|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} u_2^*(t) = x_1^*(t)\psi_2(t), \quad 0 \le t \le T \text{ . (44)}$$

Далее, аналогично разобраннному случая $\alpha = 2$ показывается , что $T = 2\theta$, где $\theta > 0$ и $x_2^*(\theta) = 0$. При этом (с учетом $x_1 = y, x_2 = y'$):

$$u_1^*(t) = A \operatorname{sgn} y'(t), \quad 0 \le t \le T ,$$

$$u_2^*(t) = \frac{1}{|\mu\alpha|^{\frac{1}{\alpha-1}}} \begin{cases} \exp\left(\dfrac{At}{\alpha-1}\right) y^{\frac{2}{\alpha-1}}(t), & 0 \le t \le T/2, \\ \exp\left(-\dfrac{A(t-T)}{\alpha-1}\right) y^{\frac{2}{\alpha-1}}(t), & \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases} \text{ .(45)}$$

Далее , неизвестное постоянное $\mu < 0$ определяется из соотношения

$$\int_0^T \left|u_2^*(t)\right|^\alpha dt = \rho^2$$

Имеем:

$$\rho^\alpha = \frac{1}{|\mu\alpha|^{\alpha/\alpha-1}} \left[\int_0^{T/2} e^{\frac{\alpha At}{\alpha-1}} y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(t)dt + \int_{T/2}^{T} e^{-\frac{\alpha A(t-T)}{\alpha-1}} y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(t)dt \right] =$$

$$= \frac{1}{|\mu\alpha|^{\alpha/(\alpha-1)}} \left[\int_0^{T/2} e^{\frac{\alpha At}{\alpha-1}} y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(t)dt + \int_0^{T/2} e^{\frac{\alpha At}{\alpha-1}} y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(T-t)dt \right].$$

В силу симметричности решения $y(t)$, относительно прямой $t = T/2$, окончательно получим

$$\left(\frac{1}{|\mu\alpha|}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \frac{\rho}{\left(2\int_0^{T/2} \exp\left(\dfrac{\alpha As}{\alpha-1}\right) y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(s)ds\right)^{1/\alpha}} = \frac{\rho}{\left(2\int_{T/2}^{T} \exp\left(-\dfrac{\alpha A(s-T)}{\alpha-1}\right) y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(s)ds\right)^{1/2}} .$$

$$u_2^*(t)=\begin{cases}\dfrac{\rho\exp\left(At/(\alpha-1)\right)y^{2/(\alpha-1)}(t)}{\left(2\int\limits_0^{T/2}\exp\left(\alpha As/(\alpha-1)\right)y^{2\alpha/(\alpha-1)}(s)ds\right)^{1/\alpha}}, & 0\le t\le T/2,\\ \dfrac{\rho\exp\left(At/(\alpha-1)\right)y^{2/(\alpha-1)}(t)}{\left(2\int\limits_{T/2}^{T}\exp\left(-\alpha As/(\alpha-1)\right)y^{2\alpha/(\alpha-1)}(s)ds\right)^{1/\beta}}, & \dfrac{T}{2}\le t\le T\end{cases} \quad (46)$$

На отрезке [0,T/2] краевая задача для $y(t)$ имеет вид:

$$y''+Ay'+\frac{\rho\exp\left(At/(\alpha-1)\right)y^{(\alpha+1)/(\alpha-1)}}{\left(2\int\limits_0^{T/2}\exp\left(\alpha As/(\alpha-1)\right)y^{2\alpha/(\alpha-1)}(s)ds\right)^{1/\alpha}}=0,$$

$$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y'(T/2)=0, \quad (47)$$

а на отрезке [T/2,T] следующий вид:

$$y''-Ay'+\frac{\rho\exp\left(-At/(\alpha-1)\right)y^{(\alpha+1)/(\alpha-1)}}{\left(2\int\limits_{T/2}^{T}\exp\left(-\alpha As/(\alpha-1)\right)y^{2\alpha/(\alpha-1)}(s)ds\right)^{1/\alpha}}=0,$$

$$y(T)=0,\ y'(T)=-1,\ y'(T/2)=0.$$

Таким образом, справедлива следующая (ср.с теоремой 4.2)

Теорема 6. Длина T максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (1) при $u(\cdot)\in \acute{U}_\alpha \quad (\alpha>1)$ характеризеется тем , что разрешима краевая задача (47).

В качестве примера вычислим величену T в случае , когда A=0 .В этом случае результат совпадает с результатом Ю.А.Меленцовой [5]. В указанной работе [5] автор получила для величины T соотношение

$$T=\left[\frac{\alpha^\alpha}{(2\alpha-1)(\alpha-1)^{\alpha-1}\rho^\alpha}\right]^{\frac{1}{2\alpha-1}}\cdot\left(2\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{1-s^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}}}\right)^{\frac{2\alpha}{2\alpha-1}} \quad (49)$$

При A=0 краевая задача (47) имеет вид:

$$y''+\frac{\rho y^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}}{\left(2\int\limits_0^{T/2}y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(s)ds\right)^{1/\alpha}}=0, \quad (50)$$

$$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y'(T/2)=0. \quad (51)$$

Умножив обе части (50) на $y(t)$, после интегрирования на отрезке [0,T/2] с учетом (51) получим

$$\int_0^{T/2}y'^2(s)ds=\frac{\rho}{\sqrt[\alpha]{2}}\left(\int_0^{T/2}y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(s)ds\right)^{1-\frac{1}{\alpha}}. \quad (52)$$

Теперь , умножив обе части (50) на $y'(t)$, после интегрирования на отрезке [0,t] имеем

$$y'^2(t) = 1 - \frac{\rho(\alpha-1)y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(t)}{\alpha\left(2\int_0^{T/2} y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(s)ds\right)^{1/\alpha}}. \quad (53)$$

Интегрируя равенство (53) на отрезке [0,T/2] , учетом (52) находим , что

$$\left(2\int_0^{T/2} y^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(s)ds\right)^{1/\alpha} = \left[\frac{T\alpha}{(2\alpha-1)\rho}\right]^{\frac{1}{\alpha-1}} \quad (54)$$

Согласно (54) из (53) при $t \in [0, T/2]$ получим

$$y'(t) = \sqrt{1 - \left[\frac{(2\alpha-1)(\alpha-1)^{(\alpha-1)}\rho^{\alpha}}{T\alpha^{\alpha}} y^{2\alpha}(t)\right]^{\frac{1}{\alpha-1}}} \quad , (55)$$

причем

$$y(0) = 0, \quad y(\frac{T}{2}) = \left[\frac{T\alpha^{\alpha}}{(2\alpha-1)(\alpha-1)^{\alpha-1}\rho^{\alpha}}\right]^{\frac{1}{2\alpha}}$$

Положив в (55) $y(t) = y(T/2)z(t)$, имеем:

$$dt = y(T/2)\frac{dz(t)}{\sqrt{1 - z^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}(t)}}, \quad z(0) = 0, \quad z(T/2) = 1. \quad (56)$$

Интегрируя (56) на отрезке [0,T/2], получим

$$\frac{T}{2} = y(T/2)\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}}},$$

что подтверждает справедливость (49).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. - М.:Наука, 1969
2. Флеминг У., Ришель Р.Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. - М.: Мир,1978
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир,1970
4. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. // Вестн. Моск. ун-та.-1959.- №2.- С.25-32
5.Меленцова Ю.А. Неулучшаемая оценка промежутка неосцилляции для линейного дифференциального уравнения с коэффициентами ограниченными в L_r . // Дифференциальные уравнения.- 1977.- Т.13.- №10. - С.1776-1786.

Андижон давлат университети,
2010 йил 3 августда қабул қилинган.