МЕТОДЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ НА ОСНОВЕ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ

Г. ТОЖИБАЕВ, У. КОСИМОВА

Мақолада функционал боғлиқликларни куб сплайнлар асосида қайта тиклаш методлари ва уларнинг афзалликлари ёритилган.

In this work show method calculation and restoration (renewal) of functional dependence at the foundation of cubic.

Историю сплайнов принято отсчитывать от момента появления первой работы Шенберга в 1946 году. Сначала сплайны рассматривались как удобный инструмент в теории и практике приближения функций. Однако область их применения начала быстро расширяться, и обнаружилось, что существует очень много сплайнов самых разных типов. Сплайны стали активно использоваться в численных методах, в системах автоматического проектирования и автоматизации научных исследований и во многих других областях человеческой деятельности.

Сплайном называется непрерывная функция, принимающая в узлах интерполяции $x_0,x_1,...,x_{n-1}$ соответствующие значения $y_0,y_1,...,y_{n-1}$ и описываемая на отдельных отрезках $[x_l,x_{l+1}]$ некоторыми полиномами $S_i(x)$.

В приложениях наиболее употребительными являются параболические и кубические сплайны. Процесс построения таких сплайнов значительно проще, чем процесс построения сплайнов более высокой степени. Матрица системы уравнений, определяющей параметры сплайна, является трехдиагональной с доминирующей главной диагональю, и при решении системы можно использовать, например, экономичный метод прогонки.

Кубические сплайны дефекта $d = 1$ широко распространены в приложениях. Параметры интерполяционного кубического сплайна находятся из решений трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений. Для равномерного шага $h_i = h = const$ в случае непериодического сплайна уравнения принимают вид : $\frac{1}{2}S''_{i-1} + 2S''_i + \frac{1}{2}S''_{i+1} = 3\frac{f_{i-1} + 2f_i + f_{i+1}}{h^2}$ (1) (i = 1,2,...,n-1), а для не равностоящих узлов:

$$a_i S''_{i-1} + 2S''_i + c_i S''_{i+1} = 6\frac{(f_{i+1} - f_i)/h_{i+1} - (f_i - f_{i-1})/h_i}{h_i + h_{i+1}} \quad (2) \text{ где } \quad c_i = h_i/(h_i + h_{i+1}), a_i = 1 - c_i$$

fi - ординаты функции в узлах, $h_i = (x_{i+1} - x_i)$ - шаг интерполяции на интервале с индексом *i*.

С математической точки зрения кубический сплайн является единственной функцией, обладающей свойством минимальной кривизны среди всех функций, интерполирующих заданные точки и имеющих вторую производную, интегрируемую с квадратом [1,2,3,4], то есть дающих минимум интегральному функционалу вида $\psi = \int_a^b (S''(x))^2 dx$ (3)

В этом смысле так называемый "естественный" кубический сплайн является самой гладкой из всех функций, интерполирующих заданные точки. При этом 3-я степень является наименьшей степенью, при которой имеют место точки перегиба.

Обобщением полиномиальных сплайнов являются рациональные сплайны, которые в ряде задач, например, при приближении функций с большими градиентами, резонансными пиками, выбросами, дают лучшие результаты по точности и минимальному числу коэффициентов. Но их аналитическое описание и аппаратная реализация являются более сложными.

Разработаны "быстрые" рекуррентные алгоритмы вычисления коэффициентов интерполяционных и сглаживающих полиномиальных сплайнов [5,6], не требующие решения систем алгебраических уравнений. Они используют дополнительные локальные условия типа минимизации функционалов вида $\psi = \int_{x_i}^{x_{i+1}} ((d^r / dx_r) S_m(x))^2 dx$, $r = 1,2,\ldots$ (4) а значения коэффициентов в формуле описания сплайна выражаются через отсчеты функции и расстояния между узлами. Алгоритмы являются абсолютно устойчивы-

ми для сплайнов дефекта *d=2,* но при *d=1* сглаживающие рекуррентные сплайны имеют ограниченную область устойчивости, а интерполяционные сплайны неустойчивы. Кубические 5-сплайны задаются выражениями:

$$B_3(x)=\begin{cases}0, & x\ge 2,\\ (2-x)^3/6, & 1\le x<,2,\\ 1/6(1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3), & 0\le x<1,\\ B_3(-x), & x<0.\end{cases}$$

На рис. 1 приведен один базисный сплайн, а на рис. 2 семейства кубических базисных *B*-сплайнов сдвинутых на постоянный шаг *h=1.*

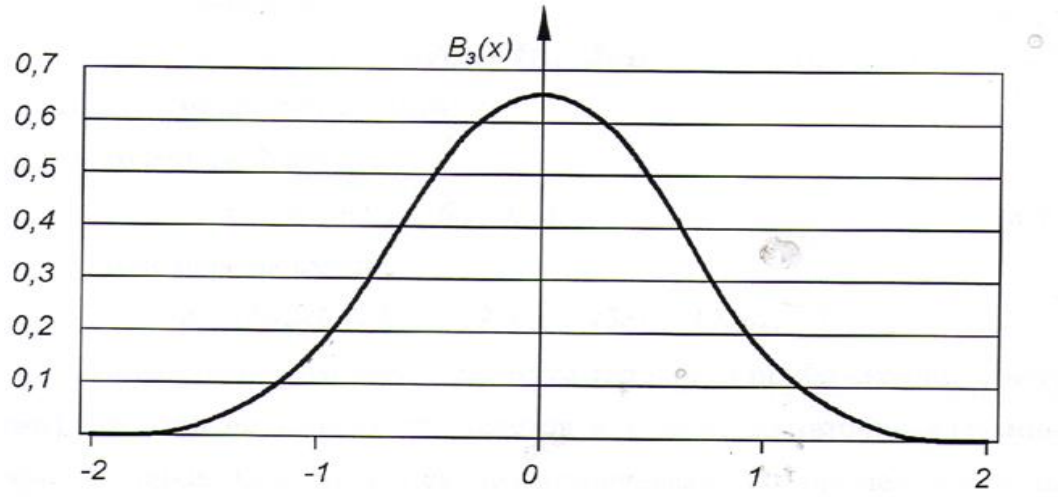


Рис.1. Кубический базисный B-сплайн.

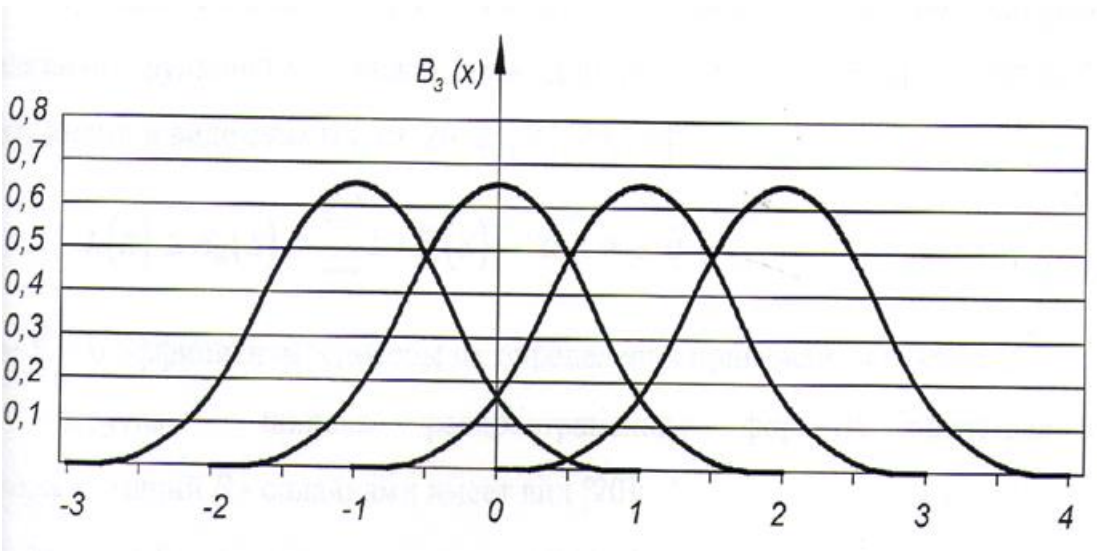


Рис.2. Семейства кубических базисных сплайнов.

Для сплайнов 3-й степени локальные формулы имеют следующий вид:

3-точечная формула:

$$b_i=(1/6)(-f_{i-1}+8f_i-f_{i+1});\quad (5)$$

5- точечная формула:

$$b_i=(1/36)(f_{i-2}-10f_{i-1}+54f_i-10f_{i+1}+f_{i+2});\quad (6)$$

7 - точечная формула:

$$b_i=(1/216)(-f_{i-3}+12f_{i-2}-75f_{i-1}+344f_i-75f_{i+1}+12f_{i+2}-f_{i+3})\ (7)$$

Для сплайнов 5-й степени:

3- точечная формула:

$b_i = (1/4)(-f_{i-1} + 6f_i - f_{i+1})$; (8)

5- точечная формула:

$b_i = (1/240)(13f_{i-2} - 122f_{i-1} + 438f_i - 122f_{i+1} + 13f_{i+2})$; (9)

Эти формулы сохраняют свойства гладкости приближений, а значения коэффициентов не зависят от отсчетов в точках, достаточно удаленных от текущей точки. Они являются симметричными, но применимы только к внутренним узлам области. Величины же коэффициентов вблизи границ должны определяться, как это уже сказано выше, посредством отдельной интерполяции в начале и в конце отрезка, а также через введение дополнительных узлов.

Любой сплайн $S_m(x)$ степени *m* дефекта 1, интерполирующий заданную функцию *f (x)* может быть единственным образом представлен *B* -сплайнами в виде суммы:

$$f(x) \cong S_m(x) = \sum_{i=-1}^{m+1} b \cdot B_i(x), \quad a \le x \le b \text{ (10)}$$

где b_i - коэффициенты.

Другая широко распространенная формула представления аппроксимаций *B* - сплайнами имеет вид:

$$S(x) = \sum_{S=1}^{m+1} a_S x^{S-1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i (x - x_i)^m_+ (x - x_i)_+ = \max(0, x - x_i) \text{ (11)}$$

1=1

Методическая погрешность интерполяции функции *f{x)* кубическими базисными сплайнами определяется неравенством:

$$\varepsilon \le \frac{5}{384} h^4 \max \left| f^{IV}(x) \right|$$

Таким образом, анализ методов приближения функций кубическими базисными сплайнами показал, что:

1. Применение кубических базисных сплайнов в ряде задач, например, при приближении функций с большими градиентами, резонансными пиками, выбросами, дают лучшие результаты по точности. Но они требуют большие аппаратные затраты для реализации вычислительных структур по сравнению с параболическими базисными сплайнами.

2. При аппроксимации функций с помощью формулы (10) проявляется локальное свойство *B*-сплайнов, заключающееся в возможности определения значения функции в произвольной точке интервала через значения только m+1 слагаемых, образующих линейную форму, т.е. сумму парных произведений величин коэффициентов на значения базисных злементов. Представление (10) является векторным и таким образом, создает основу для реализации принципов параллельных и конвейерных вычислений, для использования специализированных вычислительных структур в задачах приближения функций.

3. Специализированные вычислительные структуры дают возможность не только вследствие особенностей современной элементной базы, но и за счет представления нелинейных базисов простым способом.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994.

2. Зайнидинов Х.Н. Сравнительный анализ возможностей базисных сплайнов и классических полиномов второй степени.// Узбекский журнал проблемы информатики и энергетики. 2003.-№ 1, С.74-77.

3. Свиньин С. Ф., Аксенов А. Ю., Зайнидинов Х.Н. Применение спектор базисных сплайнов для прогнозирования региональных природных явлений. Тезисы докл. Региональной конференции «Региональная информатика» . Санкт-Петербург, 2002.-С.136-137.

Андижон муҳандислик иқтисодиёт институти,
2010 йил 15 мартда қабул қилинган