ТРАНСПОНИРЛАНГАН ВА СИММЕТРИК МАТРИЦАЛАР

Миладжонов В.Ғ., Муллажонов Р.В., Абдугаппарова Ш.Н.

В данной работе дано определение обобщенных транспонированных матриц, симметрических матриц и рассмотрены их свойства.

In this is work generalized transponible matix, symmetrical matrix and descred they attribute.

§ 1. Матрицаларни транспонирлаш.

Таъриф 1. Матрицани транспонирлаш деб бирор аниқ қонун ёки қоида асосида унинг барча элементлари ўринларини алмаштиришга айтилади.

Бизга $m \times n,\ (m \le n)$ ўлчовли $A = (a_{ij}),\ (i = 1.2....m,\ j = 1,2,...n,)$ – тўғри тўртбурчакли матрица берилган бўлсин. Матрицанинг барча элементлари ўринларини алмаштирувчи тривиал (содда) қоидаларни қараб чиқайлик:

1. Матрица сатрларини (устунларини) унинг устунлари (сатрлари) билан тўғридан тўғри (тўғри тартибда) алмаштириш.
2. Матрица сатрларини (устунларини) унинг устунлари (сатрлари) билан тескари тартибда алмаштириш.
3. Матрица i-чи сатрини (i=1,2,…m) мос равишда m+1-i-чи сатри билан алмаштириш.
4. Матрица j-устунини (j=1,2,…,n) мос равишда n+1-j- устуни билан алмаштириш.
5. Матрица i-сатрини (i=1,2,…m) мос равишда m+1-i-чи сатри билан, j-устунини (j=1,2,…,n) мос равишда n+1-j- устуни билан алмаштириш.

Аввал матрица билан боғлиқ бўлган баъзи тушунчаларни аниқлаб оламиз. Маълумки ҳар бир тўғри тўртбурчакли матрицага шу матрица элементлари ичида ётувчи тўғри тўтрбурчак мос келади:

а) А матрицанинг бош (бош бўлмаган) диагонали деб шу матрицанинг a_{ii} ,i=1,2,…,m ($a_{i,m+1-i}$,i=1,2,…,m) элементлари жойлашган нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ кесмасига айтилади;

б) А матирцанинг вертикал (горизонтал) ўқи деб шу матрицага мос тўғри бурчакли тўртбурчакнинг вертикал (горизонтал) симметрия ўқларига айтилади;

в) А матрицанинг маркази деб унга мос тўғри тўртбурчакнинг симметрия марказига айтилади.

Тўғри тўртбурчакли А матрицанинг бош ва бош бўлмаган диагоналлари унга мос тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари билан устма-уст тушмайди. Шунинг учун бундай матрицалар транспонирланганда уларнинг ўлчови nxm га алмашади. Агар n=m бўлса, яъни А квадрат матрицадан иборат бўлса, у ҳолда бу матрицанинг бош (бош бўлмаган) диагонали унга мос квадратнинг чап (ўнг) диагонали билан устма-уст тушади. Демак, геометрик нуқтаи назардан матрицани транспонирлаш нуқта ёки тўғри чизиққа нисбатан амалга оширилади. Агар нуқта ёки тўғри чизиқ кесмаси шу матрицага мос тўғри тўртбурчак(квадрат)нинг симметрия маркази ёки симметрия ўқи билан устма-уст тушса, у ҳолда транспонирланган матрицанинг ўлчови ўзгармайди, акс ҳолда, транспонирланган матрицанинг ўлчови ўзгаради. Агар А матрица бирор нуқта ёки тўғри чизиққа нисбатан транспонирланса, у ҳолда бу матрицанинг шу нуқта ёки тўғри чизиқда ётган элементлари (агар бўлса) ўзгармай қолади.

Агар А матрицага бирор тўғри тўртбурчак (квадрат) мос келиб, А матрица шу тўғри тўртбурчак(квадрат)да ётувчи нуқта ёки тўғри чизиқ кесмасига нисбатан транспонирланган бўлса, у ҳолда транспонирланган матрицага шу тўғри тўртбурчак

(квадрат)нинг транспонирлаш ўтказилган нуқта ёки тўғри чизиқ кесмаси атрофида 180° га бурилгани мос келади.

Матрицаларни транспонирлашнинг механик маъносини очиш учун матрица билан йирик масштабли механик системалар (ЙММС) ўртасида қуйидагича мослик ўрнатамиз.

$A=(a_{ij})$ – тўғри бурчакли mxn (аниқлик учун $m \le n$ деб оламиз) ўлчовли матрица бўлиб, R^n да аниқланган (ЙММС) m та эркин қисм системалардан ташкил топган бўлсин. А матрицанинг бош диагоналида ётувчи элементларига ЙММС нинг эркин қисм системаларини шундай мос қўямизки, унда a_{ii} , i=1,2,…,m элементга мос келувчи эркин қисм система $a_{m+1-i,m+1-i}$ элементга мос келувчи эркин қисм система билан мувозанатлашсин, А матрицанинг $a_{ij},\ i,j=1,2,..,m\ i<j\ (i>j)$ элементларига мос a_{ii} ва $a_{jj},\ i,j=1,2,..,m$ эркин қисм системалар орасидаги боғланишлар (тескари боғланишлар) ни, яъни $a_{ii}\ (a_{jj})$ элементга мос келувчи эркин қисм системанинг $a_{jj}\ (a_{ii})$ элементга мос келувчи эркин қисм системага таъсирини ифодаловчи функцияларни мос қўямиз. Бу боғланишлар ЙММС нинг ички боғланишлари дейлади. А матрицанинг қолган элементларига, яъни $a_{ij},\ i=1,2,...m,\ j=m+1,m+2...n,\ \ i<j\ (i>j)$ элементларига эркин қисм системалар билан берилган ЙММС билан бирга характерланувчи ташқи системалар орасидаги боғланишлар (тескари боғланишлар) ни мос қўямиз. Бу боғланишлар ташқи боғланишлар дейилади. Агар $m=n$ бўлса, ташқи боғланишлар қаралмайди, яъни барча боғланишлар ички боғланишлар бўлади. Бундай ўрнатилган мосликда матрицанинг мос бўлмаган диагоналидаги элементларга ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар орасидаги боғланишлар ва тескари боғланишлар мос келади. Агар m – жуфт бўлса, у ҳолда ҳар бир эркин қисм системага мос мувозанатлаштирувчи эркин қисм система мавжуд бўлади. Агар m – тоқ бўлса, у ҳолда $a_{\frac{m+1}{2},\frac{m+1}{2}}$ элементга мос эркин қисм системага мувозанатлашувчи қисм система мавжуд бўлмайди. Шунинг учун бу эркин қисм система эталон қисм система дейилиб, алоҳида қаралади. (Масалан, йирик масштабли энергетик системаларда системани ташкил этувчи машиналар сони тоқ бўлиб, битта машина эталон машина сифатида қаралади). Бундай мосликдан кўринадики, транспонирлаш ЙММС лар ички структураси ўзгаришини аниқлайди.

Энди матрицани транспонирлашнинг А матрицанинг барча элементлари ўринларини алмаштирувчи, юқорида келтирилган тривиал (содда) қоидаларга мос келувчи таърифларини келтирамиз.

Таъриф 2.

1. А матрицанинг сатрларини (устунларини) устунлари (сатрлари) билан тўғри тартибда алмаштириб ҳосил қилинган $A^T=(a_{ji}),\ j=1,2,...,n,\ i=1,2,...,m,$ матрица.

2. А матрицанинг сатрларини (устунларини) устунлари (сатрлари) билан тескари тартибда алмаштириб ҳосил қилинган $A^{\perp}=(a_{n+1-j,m+1-j}),\ j=1,2,...n,\ i=1,2,...,m$ матрица.

3. А матрицанинг i-сатрини m+1-i сатри билан алмаштириб ҳосил қилинган $A=(a_{m+1-i,j}),\ i=1,2,..,m,\ \ j=1,2,...,n,$ матрица.

4. А матрицанинг j-устунини n+1-j-устуни билан алмаштириб, ҳосил қилинган $A^{!}=(a_{i,n+1-j}),\ i=1,2,...m,\ j=1,2,...,n$ матрица.

5. А матрицанинг i-сатрини m+1-i сатри билан, j-устунини n+1-j-устуни билан алмаштириб ҳосил қилинган $A^0=(a_{m+1-j,n+1-j}),\ i=1,2,...,m,\ j=1,2,...,n,$ матрица.

А матрицанинг:

1) бош диагонали бўйича,

2) бош бўлмаган диагонали бўйича,

3) горизонтал ўқи бўйича,

4) вертикал ўқи бўйича,

5) маркази бўйича транспонирланган матрицаси дейилади.

Бу таърифнинг геометрик маъноси А матрицага мос келувчи тўғри тўртбурчакни:

1) бош диагоналидан ўтувчи тўғри чизиқ атрофида,

2) бош бўлмаган диагоналидан ўтувчи тўғри чизиқ атрофида,

3) горизонтал ўқи атрофида,

4) вертикал ўқи атрофида,

5) А матрица маркази атрофида 180° га буришни ифодалайди.

Юқорида матрица билан ЙММС ўртасида ўрнатилган мосликка асосан

шуни айта оламизки, таъриф 2 да келтирилган транспонирланган матрица мос равишда қаралаётган ЙММС ички структурасини

1) эркин қисм системаларни ўзгартирмай, эркин қисм системалар ўртасидаги боғланишларни уларга мос тескари боғланишлар билан ўзаро алмаштириб,

2) ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар ўртасидаги боғланишлар ва тескари боғланишлар ўзгаришсиз қолган ҳолда мувозанатланувчи эркин қисм системаларни ўзаро ва қолган боғланишларни (тескари боғланишларни) мос равишда ўзаро алмаштириб,

3) эркин қисм системаларни ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар орасидаги боғланишлар ва тескари боғланишлар билан тескари тартибда алмаштириб,

4) эркин қисм системаларни ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар орасидаги боғланишлар ва тескари боғланишлар билан тўғри тартибда алмаштириб,

5) эталон қисм системадан(агар бор бўлса) ташқари мувозанатлашувчи қисм системаларни ўзаро ва уларга мос барча боғланишларни мос тескари боғланишлар билан алмаштириб, ўзгартирилишини ифодалайди.

Эслатма 1. Агар n (m) – тоқ бўлса, у ҳолда вертикал (горизонтал) ўқ бўйича транспонирлашда эталон қисм система ва унга мос вертикал (горизонтал) боғланишлар ва тескари боғланишлар ўзгартирилмайди. Агар n (m) – жуфт бўлса, бундай қисм система мавжуд эмас.

2. Агар n ва m – тоқ бўлса, у ҳолда марказ бўйича транспонирлашда фақат эталон қисм система ўзгартирилмайди, бу қисм системага мос боғланишлар ва тескари боғланишлар тескари тартибда ўзаро алмашади. Агар n ва m – жуфт бўлса, бундай қисм система мавжуд бўлмайди.

Мисоллар : 1. $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ бўлсин. У ҳолда

$$X^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X^{\perp} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ . \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad X^{!} = \left(x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1\right)$$

$$X^{-} = (x_1, x_2, ..., x_n) = X, \qquad X^{0} = (x_n, x_{n-1}, ..., x_1)$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ бўлсин, у ҳолда

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad A^{\perp} = \begin{pmatrix} a_{34} & a_{24} & a_{14} \\ a_{33} & a_{23} & a_{13} \\ a_{32} & a_{22} & a_{12} \\ a_{31} & a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

$$A^{!} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}, \quad A^{-} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}, \quad A^{0} = \begin{pmatrix} a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix},$$

Бевосита текшириб қуйидаги хоссаларни ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

1. Агар А ва В $m \times n$ ўлчовли, тўғри тўртбурчакли матрицалар бўлса, у ҳолда

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (A+B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}, \quad (A+B)^{!} = A^{!} + B^{!},$$
$$(A+B)^{-} = A^{-} + B^{-}, \quad (A+B)^{0} = A^{0} + B^{0}$$

2. Агар А – $m \times n$, ўлчовли, тўғри тўртбурчакли матрица бўлиб, $\alpha \neq 0$ ҳақиқий сон бўлса, у ҳолда

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T, \ (\alpha A)^{\perp} = \alpha A^{\perp}, \ (\alpha A)^{!} = \alpha A^{!}, \ (\alpha A)^{-} = \alpha A^{-}, \ (\alpha A)^{0} = \alpha A^{0}.$$

3. Агар А – $m \times n$, ўлчовли, тўғри тўртбурчакли матрица бўлса, у ҳолда

$$(A^T)^T = A, \ (A^{\perp})^{\perp} = A, \ (A^{!})^{!} = A, \ (A^{-})^{-} = A, \ (A^{0})^{0} = A.$$

4. Агар А $m \times n$, В $n \times m$ ўлчовли тўғри бурчакли матрицалар бўлса, у ҳолда

$$(AB)^T = B^T A^T, \ (AB)^{\perp} = B^{\perp} A^{\perp}, \ (AB)^{0} = A^{0} B^{0}$$

5. Агар А n - тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$(A^T)^{\perp} = (A^{\perp})^T = A^0, \ (A^{!})^{-} = (A^{-})^{!} = A^0, \ (A^0)^T = (A^T)^0 = A^{\perp}$$
$$(A^0)^{\perp} = (A^{\perp})^0 = A^T, \ (A^0)^{!} = (A^{!})^0 = A^{-}, \ (A^0)^{-} = (A^{-})^0 = A^{!}$$

6. Агар А n-тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$A = (A^0)^{-1}(A^T A^{\perp})^T = (A^0)^{-1}(A^{\perp} A^T)^{\perp} = (A^{\perp} A^T)^T (A^0)^{-1} = (A^T A^{\perp})^{\perp} (A^0)^{-1}$$

7. Агар А махсусмас квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \ (A^{-1})^{\perp} = (A^{\perp})^{-1}, \ (A^{-1})^{!} = (A^{!})^{-1}, (A^{-1})^{-} = (A^{-})^{-1}, \ (A^{-1})^{0} = (A^{0})^{-1}$$

8. Агар А n-тартибли квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$\left|A^T\right| = \left|A^{\perp}\right| = \left|A^0\right| = |A|, \quad \left|A^{!}\right| = \left|A^{-}\right| = (-1)^{\alpha}|A|,$$

бу ерда α – А матрицадан $A^{!}$ ёки A^{-} матрицаларни ҳосил қилиш учун А матрицанинг сатр ёки устунларини алмаштиришлар сони.

Бу тенгликларнинг тўғрилиги таъриф 2 ва детерминантнинг хоссаларидан келиб чиқади.

9. Агар А n –тартибли квадрат матрица, Е n-тартибли бирлик матрица ва λ сонли параметр бўлса, у ҳолда

$$\left|A^T - \lambda E\right| = \left|A^{\perp} - \lambda E\right| = \left|A^0 - \lambda E\right| = \left|A - \lambda E\right|$$

Бу тенгликларнинг тўғрилиги 1.,2.,7 хоссалар ва $E = E^T = E^{\perp} = E^0$ эканлигидан келиб чиқади.

10. Агар Sp (А) – А матрицанинг изи бўлса, у ҳолда

$$Sp(A^T) = Sp(A^{\perp}) = Sp(A^0) = Sp(A),$$

11. Агар $rang(A)$ -А матрицанинг ранги бўлса, у ҳолда

$rang(A^T) = rang(A^{\perp}) = rang(A^{!}) = rang(A^{-1}) = rang(A^0) = rang(A)$

12. А квадрат матрица бўлиб, $\Delta_i, \Delta_i^T, \Delta_i^{\perp}, \Delta_i^0$ $(\overline{\Delta}_i, \overline{\Delta}_i^T, \overline{\Delta}_i^{\perp}, \overline{\Delta}_i^0)$ $i = 1,2,...,n$ лар мос равишда $A, A^T, A^{\perp}, A^0$ матрицаларнинг бош минорлари (уларнинг мос тўлдирувчи минорлари) бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли:

$$\Delta_i = \overline{\Delta}_{n-i}^0,\ i = 1,2,...,n-1,\ \Delta_n = \Delta_n^0 = |A| = |A^0| \quad (1)$$

$$\Delta_i^0 = \overline{\Delta}_{n-i},\ i = 1,2,...,n-1, \quad (2)$$

$$\Delta_i = \Delta_i^T,\ i = 1,2,...,n,\ \Delta_n = \Delta_n^T = |A| = |A^T| \quad (3)$$

$$\Delta_i = \overline{\Delta}_{n-i}^{\perp},\ i = 1,2,...,n-1,\ \Delta_n = \Delta_n^{\perp} = |A| = |A^{\perp}| \quad (4)$$

Бу тенгликларнинг тўғрилиги таъриф 2, 7 хосса ва детерминантнинг хоссаларидан келиб чиқади.

§ 2. Симметрик матрицалар

А- n- тартибли квадрат матрица бўлсин, яъни $A = (a_{ij}),\ i, j = 1,2,...,n$

Таъриф 3. А матрица симметрик дейилади, агарда унинг ҳар бир элементи учун шундай элемент мавжуд бўлиб, бу элементлар жуфтликлари бирор нуқта ёки тўғри чизиққа нисбатан ўзаро симметрик бўлса. Бу нуқта ёки тўғри чизиқда ётувчи элементлар ўз-ўзига симметрик дейилади.

Симметрик квадрат матрицанинг барча кўринишларини аниқлаш учун қуйидагича белгилашлар киритамиз. А- n- тартибли квадрат матрицага қандайдир квадрат мос келади.

1. Квадратнинг чап (ўнг) диагоналини А матрицанинг бош (бош бўлмаган) диагонали деб атаймиз,

2. Квадратнинг вертикал (горизонтал) симметрия ўқини А матрицанинг вертикал (горизонтал) ўқи деб айтамиз.

3. Квадратнинг симметрия марказини А матрицанинг маркази деб айтамиз.

Таъриф 4. А- n- тартибли квадрат матрица

1) бош диагоналга нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда $A^T = A$, яъни $a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1,2,...,n$ бўлса,

2) бош бўлмаган диагоналга нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда $A^{\perp} = A$, яъни $a_{ij} = a_{n+1-j,n+1-i},\ i, j = 1,2,...,n$ бўлса,

3) вертикал ўққа нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда $A^{!} = A$, яъни $a_{ij} = a_{i,n+1-j},\ i, j = 1,2,...,n$ бўлса,

4) горизонтал ўққа нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда $A^{-} = A$, яъни $a_{ij} = a_{n+1-i,j},\ i, j = 1,2,...,n$ бўлса,

5) матрица марказига нисбатан симметрик матрица дейилади, агарда $A^0 = A$, яъни $a_{ij} = a_{n+1-i,n+1-j},\ i, j = 1,2,...,n$ бўлса.

Шуни айтиб ўтамизки, бош ва бош бўлмаган диагоналларда А матрицанинг элементлари мавжуд, вертикал ва горизонтал ўқларда эса n жуфт бўлганда, А матрицанинг элементлари мавжуд бўлмайди, n тоқ бўлганда, мавжуд бўлади; матрица марказида n жуфт бўлганда, матрица элементи мавжуд эмас, n тоқ бўлганда $a_{\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}}$ элемент матрица марказида ётади.

Е бирлик матрица бош ва бош бўлмаган диагоналлар ҳамда матрица марказига нисбатан симметрик бўлади.

Таъриф 5. R^n фазодаги n та эркин қисм системалардан ташкил топган ЙММС:

1) эркин қисм системаларга нисбатан симметрик дейилади, агарда унинг мос боғланишлари ва тескари боғланишлари бир хил бўлса,

2) ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар ўртасидаги боғланишлар ва тескари боғланишларга нисбатан симметрик дейилади, агарда мувозанатлашувчи эркин қисм системалар жуфтликларининг ўзаро ва ўзаро мувозанатлашувчи эркин қисм системалар ўртасидаги боғланишлардан бошқа боғланишлари ўзларига мос тескари боғланишлар билан бир хил бўлса,

3) ЙММС марказига нисбатан симметрик дейилади, агарда мувозанатлашувчи эркин қисм системалар жуфтликларининг ўзаро ва барча боғланишлари ўзларига мос тескари боғланишлар билан бир хил бўлса.

Таъриф 4 дан симметрик матрицаларнинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади.

1. Бош ва бош бўлмаган диагоналларига нисбатан симметрик бўлган матрицалар шу матрица марказига нисбатан ҳам симметрик бўлади.

2. Вертикал ва горизантал ўқларга нисбатан симметрик бўлган матрицалар шу матрица марказига нисбатан ҳам симметрик бўлади.

3. Вертикал (горизонтал) ўққа нисбатан симметрик бўлган матрицалар махсус матрицалар бўлади.

4. Ихтиёрий А квадрат матрица учун қуйидагилар мос равишда бош диагоналга, бош бўлмаган диагоналга, вертикал ўққа, горизонтал ўққа ва матрица марказига нисбатан симметрик матрицалар бўлади.

$$S_1 = \frac{1}{2}(A + A^T),\ S_2 = \frac{1}{2}(A + A^{\perp}),\quad S_3 = \frac{1}{2}(A + A^{!}),\ S_4 = \frac{1}{2}(A + A^{-}),\ S_5 = \frac{1}{2}(A + A^{0}),$$

5. Агар А квадрат матрица бош (бош бўлмаган) диагоналга, вертикал (горизонтал) ўққа, матрица марказига нисбатан симметрик матрица бўлса, у ҳолда

$$A^i (i = 1,2,...),\quad \alpha A,\quad T^* AT$$

лар хам мос равишда бош (бош бўлмаган) диагоналга, вертикал (горизонтал) ўққа, матрица марказига нисбатан симметрик матрица бўлади. Бу ерда Т - А матрица билан бир хил тартибли бўлган махсусмас квадрат матрица, α - хақиқий сон, *- мос транспонирлаш белгисини билдиради.

6. Агар А махсусмас квадрат матрица бош (бош бўлмаган) диагоналга, матрица марказига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда A^{-1} ҳам мос равишда бош (бош бўлмаган) диагоналга, матрица марказига нисбатан симметрик бўлади.

7. Агар А ва В квадратик матрицалар ўз марказларига нисбатан симметрик матрицалар бўлса, у ҳолда АВ ва ВА матрицалар ўз марказларига нисбатан симетрик матрицалар бўлади.

8. Агар А n-тартибли квадрат матрица ўз марказига нисбатан симметрик бўлиб, $\Delta_i,\ i = 1,2,...,n$ бу матрицанинг бош минорлари, $\overline{\Delta}_i$ - шу минорларга мос тўлдирувчи минорлар бўлса, у ҳолда

$$\Delta_i = \overline{\Delta}_{n-i},\ i = 1,2,...,n-1 \qquad (5)$$

9. Агар А n-тартибли квадрат матрица ўз марказига нисбатан симметрик бўлса, у ҳолда

$$\overline{\Delta}_i > 0,\ i = 1,2,...,n-1,\ \Delta_n = |A| > 0 \quad (6)$$

шартлар А матрицанинг мусбат аниқланган бўлиши учун зарур ва етарли шартлар бўлади. А матрицанинг манфий аниқланган бўлиши учун (6) шартлар қуйидаги кўринишда бўлади.

$$(-1)^i \overline{\Delta}_i > 0,\ i = 1,2,...,n-1,\ (-1)^n \Delta_n = |A| > 0 \quad (7)$$

10. Агар А n-тартибли квадрат матрица 1) бош диагоналга, 2) бош бўлмаган диагоналга, 3) вертикал ўққа, 4) горизонтал ўққа, 5) матрица марказига нисбатан симметрик матрица бўлса, у ҳолда бу матрицани мос равишда қуйидагича блок матрицалар кўринишида ёзиш мумкин:

1) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^T & A_2 \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ B_1^T & a_2 & A_2 \end{pmatrix}$,

2) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ C_2 & A_1^{\perp} \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & C_1 \\ a_2^T & a_{k+1,k+1} & a_1^T \\ C_1^T & a_2 & A_1^{\perp} \end{pmatrix}$,

3) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_1' \\ A_2 & A_2' \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & A_1' \\ (a_1^T)' & a_{k+1,k+1} & (a_2^T)' \\ A_2 & a_2 & A_2' \end{pmatrix}$,

4) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_1^- & B_1^- \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ A_1^- & a_2^- & B_1^- \end{pmatrix}$,

5) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & B_1 \\ a_1^T & a_{k+1,k+1} & (a_1^T)^0 \\ B_1^0 & a_2^0 & A_1^0 \end{pmatrix}$,

бу ерда барча блок матрицалар к-тартибли

$$a_1 = (a_{k+1,1}, a_{k+1,2}, ..., a_{k+1,k})^T,\ a_2 = (a_{k+1,k+2}, a_{k+1,k+3}, ..., a_{k+1,n})^T$$

Таъриф 6. $A = (a_{ij})$ n- тартибли квадрат матрица:

1) бош диагоналга нисбатан кососимметрик (антисимметрик) дейилади, агарда $A^T = -A$, яъни $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1,2,...,n$, бўлса;

2) бош бўлмаган диагоналга нисбатан кососимметрик дейилади, агарда $A^{\perp} = -A$, яъни $a_{ij} = -a_{n+1-j,n+1-i}$, $i, j = 1,2,...,n$, бўлса;

3) вертикал ўққа нисбатан кососимметрик дейилади, агарда $A' = -A$, яъни $a_{ij} = -a_{i,n+1-j}$, $i, j = 1,2,...,n$, бўлса;

4) горизонтал ўққа нисбатан кососимметрик дейилади, агарда $A^- = -A$, яъни $a_{ij} = -a_{n+1-i,j}$, $i, j = 1,2,...,n$, бўлса;

5) матрица марказига нисбатан кососимметрик дейилади, агарда $A^0 = A$, яъни $a_{ij} = -a_{n+1-i,n+1-j}$, $i, j = 1,2,...,n$, бўлса.

Бу таърифдан қуйидагилар келиб чиқади:

1. Ҳар қандай А квадрат матрица учун қуйидагилар мос равишда бош диагоналга, бош бўлмаган диагоналга, вертикал ўққа, горизонтал ўққа, матрица марказига нисбатан кососимметрик матрицалар бўлади

$$\overline{S}_1 = \frac{1}{2}(A - A^T),\ \overline{S}_2 = \frac{1}{2}(A - A^{\perp}),\ \overline{S}_3 = \frac{1}{2}(A - A'),\ \overline{S}_4 = \frac{1}{2}(A - A^-),\ \overline{S}_5 = \frac{1}{2}(A - A^0)$$

2. Агар А квадрат матрица бўлса, у ҳолда

$$A = S_1 + \overline{S}_i, \quad i = 1,2,3,4,5$$

А матрицани мос равишда бош диагоналга, бош бўлмаган диагоналга, вертикал ўққа, горизонтал ўққа, матрица марказига нисбатан симметрик ва кососимметрик бўлган матрицалар йиғиндилари ёйилмаси бўлади.

3. Агар А n-тартибли квадрат матрица 1) бош диагоналга, 2) бош бўлмаган диагоналга, 3) вертика ўққа, 4) горизонтал ўққа, 5) матрица марказига нисбатан кососимметрик бўлса, у ҳолда бу матрицани мос равишда қуйидагича блок матрицаларга ажратиб ёзиш мумкин

1) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^T & A_2 \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & B_1 \\ -a_1^T & -a_{k+1,k+1} & a_2^T \\ -B_1^T & -a_2 & A_2 \end{pmatrix}$,

2) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ C_1^T & -A_1^{\perp} \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 & C_1 \\ a_2^T & -a_{k+1,k+1} & -a_1^T \\ C_1^T & -a_2 & -A_1^{\perp} \end{pmatrix}$,

3) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & -A_1' \\ A_2 & -A_2' \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & -a_1 & -A_1' \\ (a_1^T)' & -a_{k+1,k+1} & -(a_2^T)' \\ A_2 & -a_2 & -A_2' \end{pmatrix}$,

4) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -A_1^- & -B_1^- \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & -a_1 & B_1 \\ -a_1^T & -a_{k+1,k+1} & -a_2^T \\ -A_1^- & -a_2^- & -B_1^- \end{pmatrix}$,

5) n=2k да $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^0 & -A_1^0 \end{pmatrix}$, n=2k+1 да $A = \begin{pmatrix} A_1 & a_2 & B_1 \\ a_1^T & -a_{k+1,k+1} & -(a_1^T)^0 \\ -B_1^0 & -a_2^0 & -A_1^0 \end{pmatrix}$,

бу ерда барча блок матрицалар к-тартибли

$$a_1 = (a_{k+1,1}, a_{k+1,2}, ..., a_{k+1,k})^T, \quad a_2 = (a_{k+1,k+2}, a_{k+1,k+3}, ..., a_{k+1,n})^T$$

Таъриф 7. $A = (a_{ij})$ n – тартибли квадрат матрица:

1) бош диагоналга нисбатан ортоганал дейилади, агарда $A^T = A^{-1}$ бўлса,
2) бош бўлмаган диагоналга нисбатан ортогонал дейилади, агарда $A^{\perp} = A^{-1}$ бўлса,
3) вертикал ўққа нисбатан ортогонал дейилади, агарда $A' = A^{-1}$ бўлса,
4) горизонтал ўққа нисбатан ортогонал дейилади, агарда $A^- = A^{-1}$ бўлса,
5) матрица марказига нисбатан ортогонал дейилади, агарда $A^0 = A^{-1}$ бўлса.

Бу таърифдан келиб чиқадики, агарда А ва В квадрат матрицалар бош (бош бўлмаган) диагоналга, вертикал (горизонтал) ўққа, матрица марказига нисбатан ортоганал бўлса, у ҳолда A^{-1} ва АВ матрицалар ҳам мос равишда бош (бош бўлмаган) диагоналга, вертикал (горизонтал) ўққа, матрица марказига нисбатан ортогонал бўлади.

Адабиётлар:

1.Ланкастер П. Теория матриц.- М.: Наука, 1982
2.Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.-М.: Наука, 1966
3.Беллман Р Введение в теорию матриц.-М.: Наука,1976
4.Varge R.S, Matrix iterative analysis.-N.Y.: Pretice-Hall, 1962.
5.Ostrovski A.M, Schneider H. Some theorems on the inertia of general matrices.-J.Math.Anal.Appl., 1962

Андижон давлат университети,
2009 йил 12 февралда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.-м.ф.д. Ғ.Мўминов)