# ПУАССОН ИНТЕГРАЛИ ВА УНИНГ БАЪЗИ ТАДБИҚЛАРИ

А.Толипов, Э.Дадахўжаев, А.Исмонов

*Статья посвящяется применению интеграла Пуассона к распределению скорости частиц в статистической физике и некоторым применениям понятий теории вероятности.*

*This article inciudes the chepters using the integral of Puasson, dividing the speed of particle in statistic phisics and several uses of sentense of probuty theory.*

1. $$J_1 = \int_0^\infty \ell^{-ax^2} dx$$

интегралнинг қийматларини аниқлаймиз.

Маълумки, аниқ интеграл қиймати интеграл остидаги ўзгарувчига боғлиқ эмас. Шунинг учун

$$J_1 = \int_0^\infty \ell^{-ay^2} dy$$

интегралнинг қиймати ҳам худди юқоридаги интегралнинг қиймати каби бўлади.

Интегралларни кўпайтириш хоссасига асосан:

$$J_1^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty \ell^{-a(x^2+y^2)} dxdy$$

бунда α – доимий сон, ҳамда x ва y ўзгарувчиларнинг текисликдаги декарт координаталари деб қараш мумкин.

Декарт координаталаридан қутб координаталарига маълум формулалар ёрдамида ўтамиз:

$$x^2 + y^2 + r^2, \quad dxdy = rdrdγ$$

бунда r қутб ўқи бўлиб, координат алмаштиришда Якобиандир.

x ва y ўзгарувчилар 0 дан ∞ гача ўзгаргани учун r қутб ўқи 0 дан ∞ гача, $\varphi$ ўзгарувчи эса 0 дан $\frac{\pi}{2}$ гача ўзгаради.

Буларни ҳисобга олсак,

$$J_1^2 = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ell^{-ar^2} rdrd\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \ell^{-a\tau^2} rdr$$

ҳосил бўлади.

Бу интегрални $Z = -ar^2$ алмаштириш билан осон интеграллаймиз.

У ҳолда

$$\int_0^\infty \ell^{-a\tau^2} \cdot rdr = \frac{1}{2a} \qquad (1)$$

У ҳолда

$$J_1^2 = \frac{\pi}{4a} \quad \text{ёки} \quad J_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ ҳосил бўлади.

Демак,

$$J_1 = \int_0^\infty \ell^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (2)$$

Пуассоннинг (2) биринчи интегралидан фойдаланиб, $J_1$ ни $\alpha$ параметр бўйича кетма-кет дифференциаллаш билан Пуассоннинг тоқ индексли интегралларини ҳосил қиламиз.

$$J_3 = \int_0^\infty \ell^{-\alpha x^2} \cdot x^2 dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{u^3}}$$

$$J_5 = \int_0^\infty \ell^{-\alpha x^2} \cdot x^4 dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

Умуман, $m$ тоқ бўлганда:

$$J_m = \int_0^\infty \ell^{-ax^2} \cdot x^{2x} dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2\kappa-1)}{2^{\kappa+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2k+1}}} \qquad (\kappa = 0,1,2,3,\cdots)$$

Жуфт индексли Пуассон интегралари осон топилади. Бу интегралардан биринчиси (1) кўринишда аниқланган эди:

$$J_2 = \int_0^\infty \ell^{-ax^2} \cdot x dx = \frac{1}{2a}$$

Бу интегралнинг ҳар икки томонини а параметр бўйича дифференциаллаймиз, натижада :

$$J_4 = \int_0^\infty \ell^{-ax^3} \cdot x^2 dx = \frac{1}{2a^2} \qquad (3)$$

худди шундай усулни қўллаб $J_6$ интегрални аниқлаймиз ва ҳоказо.

Умуман, $m$ нинг жуфт қийматлари учун

$$J_m = \int_0^\infty \ell^{-ax^2} x^{2\kappa+1} dx = \frac{\kappa!}{2a^{\kappa+1}}$$

$$(\kappa = 0,1,2,\cdots)$$

ҳосил бўлади.

2. а) Пуассон интегралларидан кўп фанларда, хусусан, идеал газларда газ молекулалари тезликларинингг катталиклари тақсимланишини аниқлашда Максвелл (1867 й.) унумли фойдаланган.

Иссиқлик мувозанати бошланиши билан газ молекулаларининг турғунлиги, узлуксиз давом этувчи тақсимоти бошланади.

Газ молекулалари иссиқлик мувозанати вақтида тезликларнинг барча йўналишлари бўйича тенг эҳтимолли деб олинади. Шундай мулоҳазаларда газ молекулаларининг $u, v, \varpi$ координаталар бўйича тезлик тақсимоти

$$f(u)f(v)f(\omega) = F(u^2+v^2+\omega^2) \qquad (\text{а})$$

кўринишда аниқланади.

$(a)$ бу f ва F номаълум функцияларга нисбатан функционал тенглама бўлиб, уларни (а) га мувофиқ тузилган дифференциал тенгламани ечиб аниқлаш мумкин, бунда $u^2+v^2+\varpi^2 = c^2$, с - тезлик катталиги.

Максвелл с тезликни (а) тенглик ўринли бўладиган функцияни танлаш йўли билан аниқлаш усулини танлайди ва

$$F(c^2) = A^3\ell^{-\alpha c^2} \qquad (\text{в})$$

деб олади, бунда $A=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$ , $\alpha -$ доимий сон.

(в) нинг хосмас интеграли

$$(\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{3}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\ell^{-\alpha c^2}dc$$ бўлиб, бу

Пуассон интегралидир.

Ушбу интегрални ҳисоблашда зичлик функциясининг

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\ell^{-\frac{x^2}{2}}dx=1$$

хусусиятидан фойдаланилади.

Мулоҳазаларни давом эттириб, $J_1,J_2,J_3,J_4$ Пуассон интегралларидан фойдаланиб, молекула тезликлари катталиклари учун $C_4<\overline{C}<\sqrt{C^2}$ тенгсизликни ҳосил қилишга эришилади, бу шу билан бирга $\overline{C}=1{,}13CH,\sqrt{\overline{c^2}}=1{,}22CH$ бўлиши, яъни ўртача тезлик ва ўртача квадратик тезлик энг катта эҳтимолли тезликдан каттароқ экан, деган хулоса чиқаришга имкон беради.

б) Эҳтимоллар назариясининг муҳим тушунчаларидан бири ўрта қиймат ва дисперсия тушунчаларидир.

$\xi$- тасодифий миқдор узлуксиз қонун билан берилса, унинг ўрта қиймати $M\xi=\int xp(x)dr$, $D\xi=\int(x-a)^2p(x)dx$ бўлади, бунда P(x) зичлик функцияси.

Агар $\xi$ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси ушбу

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\int_{-\infty}^{x}\ell^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}dx$$

кўринишда бўлса, бундай тасодифий миқдорни ( $a,\delta$ ) параметрли **Нормал қонун** бўйича тақсимланган тасодифий миқдор дейилади, баъзан Гаусс қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор дейилади.

Ҳаётдаги қонуниятлар Нормал қонунга яқин бўлса, турмушда кўп ютуқларга эришилган бўлади. Эҳтимоллар назариясининг кўп теоремалари эҳтимолликнинг шу Нормал қонунга яқинлашиш шартларини аниқлашга бағишлаган.

Ҳаётий масалаларга Нормал қонун акс этишини аниқлаб бўлмаса, унинг ўрта қиймати ва дисперсияси билан иш кўришга тўғри келади. Бундай пайтда ўрта қийматни ҳисоблаш учун

$$M\xi=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\ell^{\frac{-(x-a)^2}{2\delta^2}}dx$$ интегрални, дисперсияни аниқлаш учун

$$D\xi=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\ell^{\frac{-(x-a)^2}{2\delta^2}}dx$$

интегрални ҳисоблашга тўғри келади.

Бу интегралларни ҳисоблашда $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\ell^{\frac{-x^2}{2}}dx=1$ Пуассон интегралидан фойдаланилади ва $D\xi=\delta^2$ , $M\xi=a$ бўлиши аниқланади.

Адабиётлар:

1. Сирожиддинов С.Х., Маматов М. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика.- Т., 1980
2. Радушкевич Л.В. Курс статистической физики.- М., 1968