ИНТЕГРАЛ ОПЕРАТОР ҚАТНАШГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ БИР МАСАЛА ҲАҚИДА

А.К.Ўринов, М.М.Абдуманнопов

Мақолада интеграл оператор қатнашган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала ўрганилган.

Калит сўзар: *оддий дифференциал тенглама, интеграл оператор, чегаравий масала, интеграл шартли масала, интеграл тенглама.*

В статье исследована задача с интегральным условием для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего интегральный оператор.

Ключевые слова: *обыкновенное дифференциальное уравнение, интегральный оператор, краевая задача, задача с интегральным условием, интегральное уравнение.*

This article discusses the problem of an integral condition for second-order ordinary differential equation with integral operator.

Key words: *ordinary differential equation, integral operator, boundary-value problem, problem with integral condition, integral equation.*

Фараз қилайлик, берилган $\alpha(x),\ \beta(x)$ ва $\gamma(x)$ функциялар $[0,1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $(0,1)$ интервалда

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt=0,\quad 0<x<1 \qquad (1)$$

интегро-дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда λ - берилган ҳақиқий сон, $\bar{J}_s(x)=\Gamma(s+1)(x/2)^{-s}J_s(x),\ s>-(1/2)$, $J_s(x)$ - Бессел функцияси [1].

Масала. (1) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$y(0)=k_1, \qquad \int_0^1 y(x)dx=k_2, \qquad (2)$$

бу ерда k_1 ва k_2 - берилган ҳақиқий сонлар.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз. Аввал қуйидаги леммаларни исботлаймиз.

1-лемма. Агар $y(x)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлиб,

$$\int_0^1 y(x)dx=0 \qquad (3)$$

тенгликни қаноатлантирса, $[0,1]$ сегментда шундай ξ сон топиладики, $y(\xi)=0$ тенглик ўринли бўлади.

Бу леммани исботлаш қийинчилик туғдирмайди.

2-лемма. Агар $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,x_0];\ \gamma(x_0)\le 0,\ \gamma'(x)\ge 0,\ (1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\ x\in[0,x_0]$ тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt=0,\ \ x\in(0,x_0); \quad (4)$$

$$y(0)=0, \qquad y(x_0)=0 \qquad (5)$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Исбот. (4) тенгликни $y(x)$ га кўпайтириб, сўнгра x бўйича $[0,x_0]$ сегментда интегралаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0}[y'(x)]^2\,dx+\int_0^{x_0}\left[\frac{1}{2}\alpha'(x)-\beta(x)\right]y^2(x)dx-$$

$$-\int_0^{x_0}\gamma(x)y(x)dx\int_0^{x}y(t)\,\overline{J}_s[\lambda(x-t)]dt=0\ . \qquad (6)$$

Энди (6) даги учинчи интегрални қараймиз. Уни ℓ билан белгилаб, $\overline{J}_s[\lambda(x-t)]$ функцияни

$$\overline{J}_s[\lambda(x-t)]=\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma[s+(1/2)]}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-1/2}\cos[\lambda(x-t)\eta]d\eta$$

тенглик билан алмаштирамиз [1]:

$$\ell=\frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma[s+(1/2)]}\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-1/2}\left\{\int_0^{x_0}\gamma(x)y(x)dx\int_0^{x}y(t)\cos[\lambda(x-t)\eta]dt\right\}d\eta.$$

Бу ифодадаги $\cos[\lambda(x-t)\eta]$ функцияни

$$\cos[\lambda(x-t)\eta]=\cos(\lambda x\eta)\cos(\lambda t\eta)+\sin(\lambda x\eta)\sin(\lambda t\eta)$$

тенглик орқали алмаштирсак, ℓ ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\ell=\frac{\Gamma(s+1)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma[s+(1/2)]}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-1/2}\left\{\int_0^{x_0}\gamma(x)\frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^{x}y(t)\cos(\lambda t\eta)dt\right)^2+\left(\int_0^{x}y(t)\sin(\lambda t\eta)dt\right)^2\right]dx\right\}d\eta\ .$$

Бу ердаги x бўйича интегрални бўлакласак,

$$\ell=\frac{\Gamma(s+1)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma[s+(1/2)]}\times\times\int_{-1}^{1}(1-\eta^2)^{s-1/2}\left\{\gamma(x_0)\left[\left(\int_0^{x_0}y(t)\cos(\lambda t\eta)\,dt\right)^2+\left(\int_0^{x_0}y(t)\sin(\lambda t\eta)\,dt\right)^2\right]-\right.$$

$$\left.-\int_0^{x_0}\gamma'(x)\left[\left(\int_0^{x}y(t)\cos(\lambda t\eta)\,dt\right)^2+\left(\int_0^{x}y(t)\sin(\lambda t\eta)\,dt\right)^2\right]dx\right\}d\eta$$

тенгликка эга бўламиз.

$\lambda\in R$ ва $\gamma(x_0)\le 0,\ \gamma'(x)\ge 0,\ \forall x\in[0,x_0]$ тенгсизликларга асосан охирги тенгликдан $\ell\le 0$ эканлиги келиб чиқади. Бу ва $(1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\ \ \forall x\in[0,x_0]$ тенгсизликни эътиборга олсак, (6) тенгликдан $y'(x)\equiv 0,$ яъни $y(x)=const,\ \ x\in[0,x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. Бундан эса (5) шартларга асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in[0,x_0]$ эканлиги келиб чиқади. 2-лемма исботланди.

1-теорема. Агар $\alpha(x),\gamma(x)\in C^1[0,1];\ \ \gamma(x)\le 0,\ \ \gamma'(x)\ge 0,\ \ (1/2)\alpha'(x)-\beta(x)\ge 0,\ \ x\in[0,1]$ тенгсизликлар бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция (1) тенгламани ва

$$y(0)=0,\qquad \int_0^{1}y(x)dx=0 \qquad (7)$$

шартларни қаноатлантиради. (7) тенгликларнинг иккинчиси ва 1-леммага асосан шундай $x_0 \in (0,1)$ мавжудки, $y(x_0) = 0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, {(4),(5)} масалани қарасак, 2-леммага асосан $y(x) \equiv 0,\ x \in [0, x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x) \equiv 0,\ x \in [0, x_0]$ тенгликни эътиборга олсак {(1),(7)} масаладан

$$y''(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) + \gamma(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt = 0,\quad x \in [x_0, 1);\quad (8)$$

$$y(0) = 0,\qquad \int_{x_0}^{1} y(x)dx = 0 \qquad (9)$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

{(8),(9)} тенгликларга юқоридаги усул билан 1- ва 2-леммаларни қўлласак, шундай $x_1 \in (x_0, 1)$ мавжудки, $y(x) \equiv 0,\ x \in [x_0, x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (8) ва (9) тенгликлардан

$$y''(x) + \alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) + \gamma(x)\int_{x_1}^{1} y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt = 0,\quad x \in (x_1, 1);$$

$$y(x_1) = 0,\qquad \int_{x_1}^{1} y(x)\,dx = 0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 1- ва 2-леммани қўллаймиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Натижада $[0,1]$ сегмент ичига жойлашган шундай $[0, x_0], [x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_n, x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x) \equiv 0$ бўлиб, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x) \in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(1) \equiv 0$ деган ҳулосага эга бўламиз. Демак, $y(x) \equiv 0,\ x \in [0,1]$. Унда $y_1(x) \equiv y_2(x),\ x \in [0,1]$. 1-теорема исботланди.

2-теорема. Агар 1-теорема шартлари бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x) = f(x),\ x \in (0,1) \qquad (10)$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f(x) = -\alpha(x)y'(x) - \beta(x)y(x) - \gamma(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

Агар $f(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (10) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + \int_0^1 G(x,t)\,f(t)dt,\ x \in [0,1] \qquad (11)$$

тенглик ўринли бўлади $[2]$, бу ерда

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1), x \le t; \\ (x-1)t, x \ge t. \end{cases}$$

(11) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\gamma(t)$ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=k_1(1-x)+y(1)x+\int_0^1 M(x,t)y(t)dt\ ,\ x\in[0,1] \qquad (12)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M(x,t)=[G(x,t)\alpha(t)]'_t-\beta(t)G(x,t)-G(x,t)\int_t^1\gamma(\xi)\overline{J}_s[\lambda(\xi-t)]dt.$$

(12) тенгликни x бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаб, (2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1)=2k_2-k_1-2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (12) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x)-\int_0^1 M_1(x,t)y(t)dt=F(x),\ \ x\in[0,1] \qquad (13)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$F(x)=k_1(1-2x)+2k_2x,\quad M_1(x,t)=M(x,t)-2x\int_0^1 M(z,t)dz.$$

(13)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб $[3]$, қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1-теоремадан келиб чиқади $[3]$.

(13) интеграл тенгламанинг ечими $M_1(x,t)$ ядро резольвентаси $R(x,t)$ ёрдамида

$$y(x)=F(x)+\int_0^1 R(x,t)F(t)dt\ ,\ \ x\in[0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2-теорема исботланди.

Адабиётлар:

1.Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар.- Фарғона: Фарғона нашриёти, 2012.- 112 б.

2. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.-Т.: MUMTOZ SO`Z, 2014.- 164 б.

3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –T. 2007.- 256 b.

Фарғона давлат университети,
2016 йил 19 декабрда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)