# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ И РАЗРЫВНЫМИ УСЛОВИЯМИ СКЛЕИВАНИЯ

**С.Х.Акбарова**

*Мақолада аралаш типдаги эллиптик-параболик тенглама учун интеграл шартли чегаравий масала тадқиқ этилган.*

***Калит сўзлар:*** *бузилиш чизиғи, бузилиш чизиғининг тартиби, аралаш типдаги тенглама, интеграл шартли чегаравий масала, регуляр ечим.*

*В данной статье исследуется краевая задача с интегральным условием для уравнения смешанного эллиптико-параболического типа с разрывными условиями склеивания.*

***Ключевые слова:*** *линия вырождения, порядок линии вырождения, уравнение смешанного типа, краевая задача с интегральным условием, регулярное решение.*

*In this paper the boundary value problem with integral condition for elliptik-parabolik equation of mixed type is considered.*

***Key words:*** *lines of degenerasy, order of lines of degeneracy, equation of mixed type, boundary value problem with integral condition, regulyar solution.*

---

В области $\Omega$, ограниченной отрезками $OA$, $AB$, $BB_0$ прямых $y=0$, $x=h_1$, $y=h$ при $x<0$, $y>0$ и гладкой кривой

$$\sigma : \frac{1}{q_2^2}(-x)^{2q_2} + \frac{1}{p_2^2}y^{2p_2} = 1$$

с концами в точках $A_0(-h_2,0),\ B_0(0,h)$ и отрезком $A_0O$ прямой $y=0$ при $x<0,\ y>0$, рассматривается уравнение

$$0=\begin{cases} y^{m_1}u_{xx}-x^{n_1}u_y, x>0, \\ y^{m_2}u_{xx}+(-x)^{n_2}u_{yy}, x<0, \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $m_k, n_k = const (k=1,2),\ O=O(0,0),\ h_1=(2q_1)^{1/q_1},\ h_2=q_2^{1/q_2},\ h=p_2^{1/p_2},$ $2q_1=n_1+2,\ 2q_2=n_2+2,\ 2p_2=m_2+2.$

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1=\{(x,y): 0<x<h_1, 0<y<h_2\},$$
$$\Omega_2=\{(x,y): -h<x<0, 0<y<h_2\},$$
$$J_0=\{(x,y): x=0, 0<y<h\},$$
$$J_1^+=\{(x,y): y=0, 0<x<h_1\},$$
$$J_1^-=\{(x,y): y=0, -h_2<x<0\},$$
$$J_1=\{(x,y): x=h_1, 0<y<h\}.$$

Для уравнения (1) исследуем следующую задачу:

**З а д а ч а TI.** Найти функцию $u(x,y),$ обладающую следующими свойствами:

1) выполняются “разрывные условия склеивания”:

$$u(+0,y)=u(-0,y)+\alpha(y), 0\le y\le h,$$
$$u_x(+0,y)=\beta(y)u_x(-0,y)+\gamma(y), 0\le y\le h;$$

***2)*** $u(x,y)\in C^1(\Omega);$

3) $u(x,y)$ - регулярное в области $\Omega/J$ решение уравнения (1);

4) удовлетворяет краевым условиям:

$$u(x,y)\big|_\sigma=\psi_1(x,y),\ (x,y)\in\sigma, \quad (2)$$
$$u_y\big|_{y=0}=\psi_2(x),\ -h_2<x<0, \quad (3)$$
$$u\big|_{y=0}=0, 0\le x\le h_1 \quad (4)$$
$$u(h_1,y)+\theta(y)\int_0^{h_1}u(x,y)dx=\phi(y), \quad 0\le x\le h_2 \quad (5)$$

где $\psi_1(x,y),\ \psi_2(x),\ \phi(y),\ \theta(y)$ – заданные функции, причем

$$\phi(y)\in C[0,h]\cap C^2(0,h), \quad (6)$$

$$\theta(y)\in C[0,h]\cap C^2(0,h), \quad (7)$$

а функция $\psi_1(x,y)$ имеет вид

$$\psi_1(x,y)=xy\overline{\psi_1}(x,y),\ \overline{\psi}_1(x,y)\in C(\overline{\sigma}) \quad (8)$$

$$\phi_2(0)=0,\ \theta(0)=0.$$

Здесь необходимо отметить, что нелокальная краевая задача для вырождающегося параболического уравнения смешанного типа изучена в работе [1].

Имеет место следующая теорема.

**Т е о р е м а.** Если выполняется условие

$$|\theta(y)|\le\frac{1}{h_1},\quad (9)$$

то задачаTI имеет единственное решение.

Справедливость этой теоремы непосредственно следует из принципа экстремума.

**П р и н ц и п э к с т р е м у м а.** При выполнении услови (9) и $\phi_2(y)=0$ решение $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ задачи TI достигает своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области $\overline{\Omega}$ лишь на части $\overline{\sigma}\cup J_1^-\cup\overline{J_1^+}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По принципу экстремума для параболических [2] и эллиптических уравнений [3] решение $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ может достигать своих экстремальных значений в замкнутой области $\overline{W}_1$ лишь на

$\overline{J_0}\cup\overline{J_1^+}\cup\overline{J_1}$ и в области $\overline{W}_2$ - на $\overline{\sigma}\cup J_1^-\cup\overline{J_0}$..

В силу лемм, приведенных в работах [2-3] на $\overline{J_0}$ не существует эстремальных значений.

Предположим, что существует точка $(h_1,y_0)\hat{I}\ \overline{J_1}$, и

$$|u(h_1,y_0)|=\max_{\overline{\Omega}}|u(x,t)|.$$

Тогда на основе условий (5), (9) получим

$$|u(h_1,y_0)|\le|\theta(y)|\left|\int_0^{h_1}|u(x,y_0)|\,dx\right|<|\theta(y)|h_1u(h_1,y_0)\le u(h_1,y_0),$$

что невозможно.

Таким образом, экстремальные значения достигаются лишь на $\overline{\sigma}\cup J_1^-\cup\overline{J_1^+}$.

Существование решения задачи TI при определенных ограничениях на порядки линии вырождения эквивалентным образом сведется к вопросу о разрешимости системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которой следует из единственности решения этой задачи.

**Литература:**

1. Исамухамедов С.С., Акбарова М.Х. Нелокальная краевая задача для вырождающегося параболического уравнения смешанного типа // Тезисы докладов Международной научной конференции «Вырождающиеся уравнения и уравнения смешанного типа», Ташкент. 23-25 ноября, 1993.- С.77.

2.Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе.- Новосибирск, 1973. -144 с.

3. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.- Москва: Наука, 1966.- 204 с.

*Андижон давлат университети*
*2015 йил 10 июнда қабул қилинган*
*(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)*