ЭКСПОНЕНЦИАЛ МАТРИЦА ҲАҚИДА

Н.М.Умрзақов, Ж.Д. Деҳқонов

Мақолада чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли тенгламалар системаси экспоненциал матрицасининг хоссалари исботлари билан келтирилган. Экспоненциал матрица таърифи ва хоссаларидан фойдаланиб уни топиш ҳамда бир жинсли бўлмаган системани ечишга оид мисоллар келтирилган.

Калит сўзлар: *чизикли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар системаси, экспоненциал матрица, Тейлор қатори, Коши формуласи.*

В статье приведены и доказаны свойства экспоненциальных матриц системы линейно однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрены примеры решения неоднородных систем и нахождения экспоненциальных матриц, используя их свойства и определения.

Ключевые слова: *линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, экспоненциальные матрицы, ряд Тейлора, формула Коши.*

This paper shows the properties of the exponential matrices of a system of linear homogenous differential equations with constant coefficients and proved that these properties hold. In addition, it considers examples of solutions of non homogeneous systems and methods of finding the exponential matrices using their properties and definitions.

Key Words: *System of linear differential equation with constant coefficients, exponential matrix, Cauchy's formula, infinite sum of Taylor.*

Бизга чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли тенгламалар системаси берилган:

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \mathbf{L} + a_{1n}y_{n'} \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \mathbf{L} + a_{2n}y_{n'} \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_3 + \mathbf{L} + a_{nn}y_{n'} \end{cases} \quad (1)$$

Бу системани матрицалар ёрдамида $Y' = AY$ кўринишида ёзиш мумкин, бу ерда

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \mathbf{K} \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{L} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{L} & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \mathbf{L} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эслатма.

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \mathbf{L} & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \mathbf{L} & f_{2n} \\ . & . & . & . \\ f_{m1} & f_{m2} & \mathbf{L} & f_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицанинг ҳосиласи деб

$$F' = \begin{pmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \mathbf{L} & f'_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \mathbf{L} & f'_{2n} \\ . & . & . & . \\ f'_{m1} & f'_{m2} & \mathbf{L} & f'_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицага айтилади.

(1) системанинг $x=0,\ y_1=1,\ y_2=0,\ y_3=0,\ \mathbf{K},\ y_n=0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими $y_1=e_{11},\ \ y_2=e_{21},\ \ \mathbf{K},\ \ y_n=e_{n1}$, системанинг $x=0,\ y_1=1,\ y_2=0,\ y_3=0,\ \mathbf{K},\ y_n=0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими $y_1=e_{12},\ \ y_2=e_{22},\ \ \mathbf{K},\ \ y_n=e_{n2}$, бўлсин ва ҳ.к. $x=0,\ y_1=1,\ y_2=0,\ \mathbf{K},\ y_2=0,\ \mathbf{K}$, бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими $y_1=e_{1n},\ \ y_2=e_{2n},\ \ \mathbf{K},\ \ y_n=e_{nn}$ бўлсин.

Қуйидаги матрица (1) системанинг экспоненциал матрицаси дейилади ва e^{Ax} орқали белгиланади:

$$e^{Ax}=\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \mathbf{K} & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \mathbf{K} & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & \mathbf{K} & e_{nn} \end{pmatrix}.$$

Экспоненциал матрицанинг хоссалари.

1-тасдиқ: $e^{A\cdot 0}=E$, бу ерда *E* – бирлик матрица;

2-тасдиқ: $\left(e^{Ax}\right)'=Ae^{Ax}$;

3-тасдиқ: e^{Ax} матрицанинг Тейлор қаторига ёйилмаси

$$e^{Ax}=E+Ax+\frac{A^2x^2}{2!}+\mathbf{L}+\frac{A^nx^n}{n!}+\mathbf{L}$$

кўринишга эга.

Эслатма. *F*(*x*) матрицанинг Тейлор қаторига ёйилмаси деб

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)x^2}{2!}+\mathbf{L}+\frac{F^{(n)}(0)x^n}{2!}+\mathbf{L}$$

матрицали қаторга айтамиз.

4-тасдиқ: $e^{Ax_1}\cdot e^{Ax_2}=e^{A(x_1+x_2)}$;

5-тасдиқ: (1) системанинг умумий ечимини $Y=e^{Ax}C$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$C=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \ldots \\ C_n \end{pmatrix}.$$

1-тасдиқнинг исботи:

$$e^{A\cdot 0}\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \ldots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \ldots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}_{x=0}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2-тасдиқнинг исботи: e^{Ax} матрицанинг ҳар бир устуни (1) системанинг ечимидан иборат бўлгани учун

$$\begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ \cdots \\ e_{ni} \end{pmatrix}'=A\begin{pmatrix} e_{1i} \\ e_{2i} \\ \cdots \\ e_{ni} \end{pmatrix},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

айниятлар ўринли. Бундан

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \mathbf{K} & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \mathbf{K} & e_{2n} \\ . & . & . & . \\ e_{n1} & e_{n2} & \mathbf{K} & e_{nn} \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \mathbf{K} & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \mathbf{K} & e_{2n} \\ . & . & . & . \\ e_{n1} & e_{n2} & \mathbf{K} & e_{nn} \end{pmatrix},$$

яъни 2-тасдиқнинг тўғрилиги кўринади.

3-тасдиқнинг исботи:

$$e^{Ax} = e^{A\cdot 0} + \left[e^{Ax}\right]'_{x=0} + \frac{\left[e^{Ax}\right]''_{x=0}}{2!}x^2 + \mathbf{L} + \frac{\left[e^{Ax}\right]^{(x)}_{x=0}}{2!}x^n + \mathbf{L}$$

1-тасдиққа кўра $e^{A\cdot 0} = E$. 2-тасдиққа кўра

$$\left[e^{Ax}\right]'_{x=0} = A\cdot E = A,\ \left[e^{Ax}\right]''_{x=0} = A^2\cdot E = A^2,\quad \mathbf{K}, \left[e^{Ax}\right]^n_{x=0} = A^n.$$

Бу тенгликлардан

$$e^{Ax} = E + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + \mathbf{L} + \frac{A^n x^n}{n!} + \mathbf{L} \qquad (2)$$

тенглик келиб чиқади.

4-тасдиқнинг исботи: 3-тасдикда исботланган (2) формулага кўра $e^{Ax_1}\cdot e^{Ax_2}$ кўпайтмани ҳисоблаймиз:

$$e^{Ax_1}\cdot e^{Ax_2} = \left(E + Ax_1 + \frac{A^2x_1^2}{2!} + \mathbf{L} + \frac{A^n x_1^n}{n!} + \mathbf{L}\right)\times\times\left(E + Ax_2 + \frac{A^2x_2^2}{2!} + \mathbf{L} + \frac{A^n x_2^n}{n!} + \mathbf{L}\right) =$$

$$= E + A\left(x_1 + x_2\right) + A^2\left(\frac{x_1^2}{2!} + x_1x_2 + \frac{x_2^2}{n!}\right) + \mathbf{L}$$

$$+A^n\left(\frac{x_1^n}{n!} + \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{x_2}{1!} + \mathbf{L}\,\frac{x_1^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{x_2^k}{k!} + \mathbf{L}\,\frac{x_2^n}{n!}\right) + \mathbf{L} =$$

$$= E + A\left(x_1 + x_2\right) + \frac{A^2}{2!}\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) + \mathbf{L} + \frac{A^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}x_1^{n-k}x_2^k + \mathbf{L}$$

$$== E + A\left(x_1 + x_2\right) + \frac{A^2\left(x_1 + x_2\right)^2}{2!} + \mathbf{L} + \frac{A^n\left(x_1 + x_2\right)^n}{n!} + \mathbf{L} == e^{A(x_1+x_2)}$$

5-тасдиқнинг исботи: e^{Ax} матрицанинг ҳар бир устуни (1) системанинг ечимидан иборат. Бу *n* та ечимнинг Вронский детерминанти *x* = 0 нуқтада бирлик матрица детерминантидан иборат, яъни қиймати 1 га тенг. Демак e^{Ax} матрицанинг устунлари (1) системанинг фундаментал ечимлар ситемасидан иборат ва системанинг умумий ечимини

$$Y = \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ \mathbf{L} \\ e_{1n} \end{pmatrix}C_1 + \begin{pmatrix} e_{21} \\ e_{22} \\ \mathbf{L} \\ e_{2n} \end{pmatrix}C_2 + \mathbf{L} + \begin{pmatrix} e_{n1} \\ e_{n2} \\ \mathbf{L} \\ e_{nn} \end{pmatrix}C_n = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \mathbf{L} & e_{n1} \\ e_{12} & e_{22} & \mathbf{L} & e_{n2} \\ \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} & \mathbf{L} \\ e_{1n} & e_{2n} & \mathbf{L} & e_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \mathbf{L} \\ C_n \end{pmatrix} = e^{Ax}C.$$

кўринишида ифодалаш мумкин.

1-мисол. Системанинг экспоненциал матрицасини тузинг:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -y \end{cases} \quad (2)$$

Бу системанинг умумий ечими $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,\ \ z = C_1 \cos x - C_2 \sin x$. (2) системанинг $y(0) = 1, z(0) = 0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини аниқлаймиз:

$$y = \cos\ x,\quad z = -\sin x$$

Демак, e^{Ax} матрицанинг биринчи устуни $\begin{pmatrix} \cos\ x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ дан иборат. $y(0) = 1, z(0) = 0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечим, $y = \cos\ x,\quad z = -\sin x$ бўлгани учун, e^{Ax} матрицанинг иккинчи устуни $\begin{pmatrix} \cos\ x \\ -\sin x \end{pmatrix}$ кўринишидадир. Шундай қилиб

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

Чизиқли ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган

$$y_t^i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \mathbf{K} + a_{in} y_n + b_i(x),\quad (i = 1, 2, \mathbf{K}, n)$$

системани қараймиз. Уни матрицалар ёрдамида ёзиб оламиз:

$$Y' = AY + B(x) \quad (3)$$

(3) системанинг ечимини

$$Y = e^{Ax} C(x) \quad (4)$$

кўринишида қидирамиз, бу ерда e^{Ax} – экспоненциал матрица, $C(x) = (C_1(x), C_2(x), \mathbf{K}, C_n(x))^T$. (4) ни (3) га олиб бориб қўямиз:

$$Y' = Ae^{Ax} C(x) + e^{Ax} C'(x) = Ae^{Ax} C(x) + B(x).$$

Бундан:

$$e^{Ax} C'(x) = B(x).$$

Бу тенгликни чапдан e^{-Ax} га кўпайтирамиз. Экспоненциал матрицанинг 2- ва 4- хоссаларига кўра, $e^{-Ax} \cdot e^{Ax} = e^{A(-x+x)} = E$. Натижада

$$C'(x) = e^{-Ax} B(x),\ C(x) = \int e^{-Ax} B(x)\,dx + C,$$

бу ерда $C = (C_1, C_2\ \mathbf{K}, C_n)^T$ – ихтиёрий ўзгармас вектор. $C(x)$ нинг топилган ифодасини (4) га қўйиб, (3) системанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$Y = e^{Ax} \left(\int e^{-Ax} B(x)\,dx + C \right) \quad (5)$$

Бу умумий ечим формуласидан фойдаланиб, (3) системанинг $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0$, ... , $y_n(x_0) = y_n^0$ шартни қаноатлантирувчи ечимини аниқлаймиз:

$$Y = e^{Ax} \left(Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-At} B(t)\,dt \right)$$

ёки:

$$Y = e^{Ax} Y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(x-t)} B(t)\,dt,$$

бу ерда $Y_0 = (y_1^0, y_2^0, \mathbf{K}, y_n^0)^T$. Бу формула **Коши формуласи** деб юритилади.

2 - мисол. Ўзгармасни вариациялаш усулида ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \dot{y} = -x + \operatorname{tg} t \end{cases} \quad (6)$$

Бу ерда $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Бу системага мос бир жинсли система учун экспоненциал матрицани 1-ми солда тузган эдик:

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

(5) формулага кўра (6) системанинг ечимини аниқлаймиз:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\int \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \left[\int \begin{pmatrix} -\cos t \\ \left(-\sin t + \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \right) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t + C_1 \\ \cos t + \dfrac{1}{\cos t} + C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t + \operatorname{tg} t \\ -C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2 \end{pmatrix}$$

Адабиётлар:

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями.- М.: КомКнига, 2005. – 256 с.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1974.– 332 с.

3. Салохитдинов М.С., Насриддинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар.-Т.: Ўзбекистон, 1994.- 343 б.

4. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. Учебник. Изд. 2-е, испр.- М.: КомКнига, 2007. – 240 с.

Андижон давлат университети
2015 йил 25 мартда қабул қилинган
(Тақризчи: ф-м.ф.н. Т.Ибайдуллаев)