KO‘RSATKICHLI VA LOGARIFMIK MASALALARNI YECHISHNING BIR USULI HAQIDA

N.Umrzaqov, B.Abduqodirov

Maqolada ayrim ko‘rsatkichli va logarifmik masalalar o‘rganilgan bo‘lib, ularni yechishda ko‘rsatkichli va logarifmik funksiyaning o‘sish va kamayish xossalariga asoslanildi.

Kalit so‘zlar: *ko‘rsatkichli tengsizlik, logarifmik tengsizlik.*

В статье рассматриваются некоторые типы показательных и логарифмических задач, решение которых основано на использовании свойств монотонности показательной и логарифмической функций.

Ключевые слова: *показательные неравенства, логарифмические неравенства.*

The article discusses some types of exponential and logarithmic problems whose solution is based on the properties of the monotony of exponential and logarithmic functions.

Keywords*: exponential inequalities, logarithmic inequality.*

Ushbu maqolada elementar matematika kursida uchraydigan logarifmik va ko‘rsatkichli funksiya xossalariga ko‘ra yechiladigan ayrim masalalar qaraladi. Bunday masalalarni yechishning odatiy usullaridan farq qiladigan usullarini ko‘rsatamiz. Keltiriladigan usullar misol va maslalarni tezroq yechish uchun hizmat qiladi. O`quvchilar har qanday masalani birinchi navbatda to‘g’ri yechishlari va ikkinchi navbatda tezkorlik bilan yechishlari muhim.

Dastlab a^b va 1 sonlarini taqqoslashni ko‘raylik, bu yerda $a \in (0;1) \cup (1;+\infty)$, $b \in R$. Odatda bu masala ko‘rsatkichli $y = a^x$ funksiyaning xossasiga asosan yechiladi. Ya’ni, agar

1) $a>1,\ b>0$ bo‘lsa $a^b>1$; 2) $a>1,\ b<0$ bo‘lsa $a^b<1$;

3) $0<a<1,\ b>0$ bo‘lsa $a^b<1$; 4) $0<a<1,\ b<0$ bo‘lsa $a^b>1$ bo‘ladi.

Masalani quyidagi tasdiqqa asosan yechish ham mumkin.

1-tasdiq. a^b-1 ifodaning ishorasi $(a-1)b$ ifodaning ishorasi bilan bir hil.

Isbot. $a^b-1>0$ bo‘lsin. U holda $a^b>a^0$. Bundan yo $a>1,\ b>0$ yo $0<a<1,\ b<0$. Har ikkala holda ham $(a-1)b>0$ bo‘ladi. $a^b-1<0$ bo‘lsin. U holda $a^b<a^0$. Bundan yo $a>1,\ b<0$ yo $0<a<1,\ b>0$. Har ikkala holda ham $(a-1)b<0$ bo‘ladi.

Masalan. $0,7^{-1,2}$ sonini 1 bilan taqqoslaylik.

$(0,7-1)\cdot(-1,2)>0.$

Demak, $0,7^{-1,2}>1.$

Ko‘rsatkichli tengsizlikni yechish uchun asosdan qutulish zarur. Xususan,

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}$$

tengsizlik agar $a>1$ bo‘lsa, $f(x)>g(x)$ tengsizlikka, agar $0<a<1$ bo‘lsa, $f(x)<g(x)$ tengsizlikka teng kuchli.

Qaralgan tengsizlikni quyidagi tasdiqdan foydalanib yechish ham mumkin.

2-tasdiq. $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ tengsizlik $(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0$ tengsizlikka teng kuchli.

Isbot. $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ bo‘lsin. Agar $a>1$ bo‘lsa,

$$f(x)>g(x)$$

yoki

$$(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz.

Agar $0<a<1$ bo‘lsa,

$$f(x)<g(x)$$

yoki

$$(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0$$

tengsizlikka ega bo‘lamiz. Har ikkala holda ham $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ tengsizlik

$$(a-1)\big(f(x)-g(x)\big)>0$$

tengsizlikka aylandi.

Misol. $0,25^x\ge 0,5^{4x-8}$ tengsizlikni yeching.

Yechish. Berilgan tengsizlikni $0,5^{2x}\ge 0,5^{4x-8}$ ko‘rinishga keltirib olamiz. 2-tasdiqqa ko‘ra,

$$(0,5-1)(2x-4x+8)\ge 0\Rightarrow x\ge 4.$$

Javob. $x\ge 4$

Logarifmik ko‘rinishda berilgan sonlarning ishorasini, odatda, quyidagi tasdiqqa ko‘ra aniqlaymiz.

3-tasdiq. $\log_a b$ ning ishorasi.

1) $a>1,\ b>1$ bo‘lsa, musbat; 2) $0<a<1,\ b<1$ bo‘lsa, musbat;

3) $a>1,\ b<1$ bo‘lsa, manfiy; 4) $0<a<1,\ b>1$ bo‘lsa, manfiy.

$\log_b a$ ning ishorasini boshqa tasdiqqa ko‘ra aniqlash mumkin.

4-tasdiq. $\log_a b$ ning ishorasi $(a-1)(b-1)$ ning ishorasi bilan bir xil.

Isbot. $\log_a b>0$ bo‘lsin. U holda $\log_a b>\log_a 1$. Bundan yo $a>1,\ b>1$ yo $0<a<1,\ 0<b<1$. Har ikkala holda ham $(a-1)(b-1)>0$ bo‘ladi. $\log_a b<0$ bo‘lsin. U holda $\log_a b<\log_a 1$. Bundan yo $a>1,$ $0<b<1$ yo $0<a<1,\ b>1$. Har ikkala holda ham $(a-1)(b-1)<0$ bo‘ladi.

Masalan. $\log_{1,2}\dfrac{3}{8}$ ning ishorasini aniqlaylik:

$$(1,2-1)\left(\frac{3}{8}-1\right)<0$$

Demak, $\log_{1,2}\frac{3}{8}<0.$

Bir xil asosli logarifmik sonlarni taqqoslashda, odatda, logarifmik $y=\log_a x$ funksiya xossasiga asoslaniladi. Ya'ni, agar

1) $a>1,\ b>c>0$ bo'lsa $\log_a b>\log_a c$,

2) agar $0<a<1,\ b>c>0$ bo'lsa $\log_a b<\log_a c.$

Taqqoslashni quyidagi tasdiqqa asosan olib borish ham mumkin.

5-tasdiq. $\log_a b-\log_a c$ ifodaning ishorasi $(a-1)(b-c)$ ko'paytmaning ishorasi bilan bir xil.

Isbot. $\log_a b-\log_a c>0$ bo'lsin. U holda $\log_a b>\log_a c.$ Bundan yo $a>1,\ b>c>0$ yo $0<a<1,$ $0<b<c.$ Har ikkala holda ham $(a-1)(b-c)>0$ bo'ladi. $\log_a b-\log_a c<0$ bo'lsin. U holda $\log_a b<\log_a c.$ Bundan yo $a>1,\ 0<b<c$ yo $0<a<1,\ b>c>0.$ Har ikkala holda ham $(a-1)(b-1)<0$ bo'ladi.

Masalan, $\log_{0,5}5$ va $\log_{0,5}3$ ni taqqoslaylik:

$$(0,5-1)(5-3)<0.$$

Demak, $\log_{0,5}5<\log_{0,5}3.$

Asoslari har xil, ammo logarifm ostidagi sonlar bir xil bo'lgan logarifmik sonlarni taqqoslashda, odatda, bir xil asoslarga o'tib olinadi, keyin xulosa chiqariladi. Bunday masalalarni yechishda quyidagi tasdiqdan foydalanish mumkin.

6-tasdiq. Agar $\log_b a$ va $\log_c a$ bir xil ishorali bo'lsa, $\log_b a-\log_c a$ ifodaning ishorasi $(1-a)(b-c)$ ko'paytmaning ishorasi bilan bir hil.

Isbot. $\log_b a-\log_c a>0$ bo'lsin. U holda

$$\frac{1}{\log_a b}-\frac{1}{\log_a c}=\frac{\log_a c-\log_a b}{\log_a b\cdot\log_a c}>0.$$

$\log_b a$ va $\log_c a$ bir hil ishorali ekanini hisobga olsak, $\log_a c-\log_a b>0.$ 5-tasdiqqa ko'ra $(1-a)(b-c)>0.$

$\log_b a-\log_c a<0$ bo'lsin. U holda

$$\frac{1}{\log_a b}-\frac{1}{\log_a c}=\frac{\log_a c-\log_a b}{\log_a b\cdot\log_a c}<0.$$

$\log_b a$ va $\log_c a$ bir hil ishorali ekanini hisobga olsak, $\log_a c-\log_a b<0.$ 5-tasdiqqa ko'ra $(1-a)(b-c)<0.$ Tasdiq isbotlandi.

Misol. $\log_{0,25}3$ va $\log_{0,5}3$ ni taqqoslang.

Yechish.

$$(1-3)(0,25-0,5)>0$$

Javob. $\log_{0,25}3>\log_{0,5}3.$

7-tasdiq.

$$\log_{a(x)}f(x)>\log_{a(x)}g(x) \qquad (1)$$

tengsizlikni yechish uchun uning aniqlanish sohasida

$$(a(x)-1)(f(x)-g(x))>0 \qquad (2)$$

tengsizlikni yechish kerak.

Isbot tengsizlik aniqlanish sohasida quyidagi ikkita sistemaga ajraladi

$$\begin{cases} f(x)>g(x) \\ a(x)>1 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} f(x)<g(x) \\ a(x)<1 \end{cases}$$

Bu ikkala sistema yechimlari quyidagi tengsizlik yechimlari bilan aynan bir xil.

Demak, (1) tengsizlikni aniqlanish sohasida (2) tengsizlikni yechsak, (1) tenglama yechimi hosil bo'lar ekan.

Misol. $\log_{x^2}(x+2) \le 1$ tengsizlikni yeching.

Yechish. (2) tengsizlik quyidagi ko‘rinishni oladi

$$\left(x^2-1\right)\left(x+2-x^2\right) \le 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x+1)(2-x) \le 0$$

Bundan

$$x \in (-\infty;1] \cup [2;\infty) \qquad (3)$$

Berilgan tengsizlikning aniqlanish sohasini topaylik:

$$\begin{cases} x > -2 \\ x \ne 0,\ \pm 1 \end{cases}$$

$$x \in (-2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup (1;+\infty). \qquad (4)$$

(3) va (4) to‘plamlar kesishmasi berilgan tengsizlikning yechimlari to‘plamidan iborat.

Javob: $x \in (-2;-1) \cup (-1;0) \cup (0;1) \cup [2;\infty)$.

Adabiyotlar:

1. Моденов В.П. Математика: Пособие для поступающих в вузы.- М.: Новая Волна, 2002. – 800 с.
2. Цыпкин А. Г. Справочник по математике для средней школы. – М.: Наука, 1980. – 400 с.

Андижон давлат университети,
2015 йил 13 майда қабул қилинган
(Тақризчи: доц. Т.Ибайдуллаев)