НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

С.Х.АКБАРОВА

Мақолада турли тартибли ва иккита бузилиш чизиғига эга аралаш параболо-гиперболик типдаги тенглама учун нолокал чегаравий масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

***Калит сўзлар**: аралаш типдаги тенглама, бузилиш чизиғи, чегаравий масала, нолокал чегаравий масала, регуляр ечим.*

В данной статье доказывается существование и единственность решения нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения.

***Ключевые слова:** уравнения смешанного типа, линия вырождения, краевая задача, нелокальная краевая задача, регулярное решение.*

This paper offers the solution of the problem of uniqueness and existence of the nonlocal boundary value problems for parabolic-hyperbolic equation of mixed type with two lines and different orders of degeneracy.

***Key words:** equation of mixed type, lines of degeneracy, boundary value problem, nonlocal boundary value problem, regular solution.*

Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов с двумя линиями и различными порядками вырождения внутри области исследованы в работах [1-2].

Настоящая статья посвящена постановке и исследованию одной нелокальной краевой задачи для уравнения вида

$$0=\begin{cases} y^{m_1}u_{xx}-|x|^{n_1}u_y, y>0 \\ (-y)^{m_2}u_{xx}-|x|^{n_2}u_{yy}, y<0 \end{cases} \tag{1}$$

$$m_k, n_k = const (k=1,2),$$

причем

$$m_1>0, n_1>m_1-1, m_2>n_2>0. \tag{2}$$

Пусть область D, ограниченная отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x=h_1$, $y=h_2$, $x=-h_1$ соответственно при $y>0$ и характеристиками

$$I_i: \frac{1}{q_2}|x|^{q_2}-\frac{1}{p_2}(-y)^{p_2}=0,$$

$$L_i: \frac{1}{q_2}|x|^{q_2}+\frac{1}{p_2}(-y)^{p_2}=\frac{h_1^{q_2}}{q_2},$$

уравнения (1) при $y<0$ Здесь и далее $x\geq 0$ при $i=1$, $x\leq 0$ при $i=2$;

$$h_1=(2q_1)^{1/q_1},\ 2q_1=n_1+2,\ h_2=const>0,\ 2q_2=n_2+2,\ 2p_2=m_2+2.$$

Обозначим через D_1^+ и D_2^+ – параболические части, D_1^- и D_2^- – гиперболические части смешанной области D; и $I_0=\{(x,y): x=0, 0<y<h_2\}$, $I_1=\{(x,y): 0<x<h_1, y=0\}$,

$$I_2=\{(x,y): -h_1<x<0, y=0\},\ \Delta_0=D_1^+\cup D_2^+\cup I_0,\ \Delta_1=D_1^-\cup D_1^+\cup I_1,$$
$$\Delta_2=D_2^-\cup D_2^+\cup I_2,\ 2\alpha=n_2/(n_2+2),\ 2\beta=m_2/(m_2+2).$$

Задача ТВ. Требуется найти функцию, удовлетворяющую условиям:

1) $u(x, y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D_i^+\cup D_i^-)$;

2) $u_x\in C(I_j)(j=0,1,2), u_y(x,-0)\in C(I_j)(j=1,2)$, причем $u_y(x,-0)$ и u_x могут иметь особенность порядка меньше $(1-2\beta)/(1-2\alpha)$ и единицы в точках $A(h_1,0)$, $A_0(-h_1,0), 0(0,0)$ соответственно;

3) $u(x,y)$ регулярное решение уравнения (1) в областях D_i^-, D_i^+ $(i=1,2)$;

4) выполняются условия склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^{-m_2}u_y(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,y) \text{ на } I_1\cup I_2, \tag{3}$$

$$\lim_{y\to+0}u_x(x,y)=\lim_{y\to-0}u_x(x,y) \text{ на } I_0 \tag{4}$$

5) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$\sum_{k=1}^{n}\{b_k^+(y)u_x(x_k,y)+a_k^+(y)u(x_k,y)\}+\mu^+(y)=u(h_1,y),$$
$$y\in\bar{I}_0, 0<x_k<h_1, \tag{5$_1$}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\{b_k^-(y)u_x(x_k,y)+a_k^-(y)u(x_k,y)\}+\mu^-(y)=u(-h_1,y),$$
$$y\in\bar{I}_0, -h_1<x_k<0, \tag{5$_2$}$$

$$\frac{d}{d|x|^{2q_2}}(|x|^{2q_2})^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}}F_{0x}^{-\beta}\left[\begin{matrix}\frac{\alpha+\beta-1}{2},\frac{\alpha+\beta}{2}\\ \beta,|x|^{2q_2}\end{matrix}\right](|x|^{2q_2})^{\frac{2\alpha-1}{2}}u\left[\theta_i(x)\right]=$$

$$=a_i(x)u_y(x,0)+b_i(x),\quad x\in I_i,\qquad (i=1,2), \tag{6}$$

где $a_k^+(y)$, $b_k^+(y)$, $a_k^-(y)$, $b_k^-(y)$, $\mu^+(y)$, $\mu^-(y)$, $a_i(x), b_i(x)$ заданные функции, причем

$$a_k^+(y),\ b_k^+(y),\ a_k^-(y),\ b_k^-(y),\mu^+(y),\ \mu^-(y),\in C(\bar{I}_0)\cap C^1(I_0), \tag{7}$$

$$a_i(x)\in C(\bar{I}_0)\cap C^2(I_i),\ b_i(x)\in C^2(I_i), \tag{8}$$

и, либо

$$(x^{2q_2})^{\frac{1-\alpha+\beta}{2}}a(x)+\gamma_1\neq 0, \tag{9$_1$}$$

либо

$$(x^{2q_2})^{\frac{1-\alpha+\beta}{2}}a(x)+\gamma_1=0, \tag{10$_1$}$$

γ_1-определенное число, $2a = n/(n + 2)$, $2\beta = m_2/(m_2+2)$, а

$F_{0x}^{-c}\left[\begin{matrix}a,b\\ c,\frac{x^k-t^k}{x^k}\end{matrix}\right]f(x)$ известный оператор[3], $\theta_i(x)$ -аффикс точки пересечения характеристики уравнения (1), выходящей из точки $(x,0)\in I_i$ c с характеристикой .

Отметим, что эта задача при $a_k^+(y), b_k^+(y), a_k^-(y), b_k^-(y)=0$ изучена в [2], а при выполнении условия поставленная задача эквивалентно редуцируется к следующей задаче, которая будет однозначно разрешима: определить функцию $u(x,y)$ из класса $C\left(\overline{\Delta_0}\right)\cap C^{2,1}\left(D_1^+\cup D_2^+\right)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области $D_1^+\cup D_2^+$ и условиям (5_1), (5_2),

$$u(x,0)=\frac{1}{\gamma_2}(|x|^{2q_2})^{\beta-\alpha}F_{0x}^{-\beta}\left[\begin{matrix}\alpha-\beta,\frac{1-2\beta}{2}\\ 1-2\beta,|x|^{2q_2}\end{matrix}\right](|x|^{2q_2})^{\frac{\alpha+\beta}{2}}b_i(x),$$

здесь

$$\gamma_2=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}2^{\alpha-\beta}.$$

Пусть имеют место условия (9_1), (9_2),

Теорема. Если выполняются условия (2),(7), (8_1), (8_2), то решение задачи ТВ существует и единственно.

Для доказательства теоремы нам необходимо исследовать следующие вспомогательные задачи.

Задача Найти решение

$$u(x,y)\in C\left(\overline{\Delta_0}\right)\cap C^1(\Delta_0)\cap C^{2,1}(D_1^+\cup D_2^+),$$

причем u_x (0, y) особенность порядка меньше $(m_1+1)/(n_2+2)$, при $\gamma\to 0$, ограничена при $y\to h_2$, уравнения (1), удовлетворяющее условиям (5_1), (5_2), и

$$u(x,0)=\tau_1(x),\ \ x\in\bar{I}_1\ \ (11_1)$$

$$u(x,0)=\tau_2(x),\ \ x\in\bar{I}_2\ \ (11_2)$$

где $\tau_1(x), \tau_2(x)$ - заданные функции, причем $\tau_i(x),\in C\left(\bar{I}_i\right)\cap C^2(I_i)$

Задача TB_i. Найти функцию $u(x, y)$, обладающую свойствами:
1) $u(x,y)\in C(\overline{\Delta_i})\cap C^1(\Delta_0)\cap C^1(D_i^+\cup D_i^-)$ и удовлетворяет условие задачи 2) задачи ТВ

2) $u(x, y)$, регулярное решение уравнения (1) в D_i^- и D_i^+
3) удовлетворяет условиям (3), (5_i), (5_i), и

$$u(0,y)=\tau_0(y),\ \ y\in\overline{I_0}, \tag{12}$$

где $\tau_0(y)$ - заданная функция, причем $\tau_0(y)\in C(\overline{I_0})\cap C^2(I_0)$

Методом интегральных уравнений можно доказать, что существует единственное решение задач $ТВ_0$, $ТВ_1$ и $ТВ_2$. В силу этого существование решения задачи ТВ эквивалентным образом сведется к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода [4], которая будет однозначно разрешима.

Литература:

1. Салахитдинов М.С., Акбарова С.Х. Краевые задачи для смешанного эллиптико-параболического уравнения с различными порядками вырождения внутри области // Узбекский математический журнал. – 1994. – №4. – С. 51–60.

2. Исломов Б., Акбарова С.Х. Краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа с двумя линиями и различными порядками вырождения внутри области // Узбекский математический журнал. – 1995. №2. С. 54–62.

3. Салахитдинов М.С.,Хасанов А. Задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференциальные уравнения. – 1983. – №1. – С. 110 – 118.

4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука,1967.

Андижон давлат университети,
2013 йил 3 октябрда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)