ЛАВРЕНТЬЕВ – БИЦАДЗЕ ТЕНГЛАМАСИ УЧУН БИР МАСАЛАНИНГ ХОС СОНЛАРИ ВА ХОС ФУНКЦИЯЛАРИ

Ш.С.МАМАРАСУЛОВ

В данний работе найдений собственные числа собственные функции одной краевой задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе.

In this paper foundry-value problem for the Lavrentev –Bitsadze equation is considered

xOy текисилигининг $\overline{\sigma}_0 = \left\{(x,y): x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0\right\}$ ёй ва

$\overline{OD} = \left\{(x,y): x + y = 0, 0 \le x \le 1/2\right\}$, $\overline{DA} = \left\{(x,y): x - y = 1, (1/2) \le x \le 1\right\}$ кесмалар билан

чегараланган чекли соҳасини Ω орқали, унинг $y>0, y<0$ ва $y=0$ бўлгандаги қисмларини мос равишда Ω_0, Ω_1 ва OA билан белгилайлик.

P_λ **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\overline{\Omega}$ да тривиал бўлмаган $U(x,y)$ функциялар мавжуд бўлсин:

1) $U(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega \setminus OA)$;

2) Ω_0 ва Ω_1 соҳаларда

$$U_{xx} + (signy)U_{yy} = -\lambda u \qquad (1)$$

тенгламанинг регуляр ечими;

3) $$U(x,y) = 0, (x,y) \in \overline{\sigma}_0; \qquad (2)$$

4) $$U(0,y) = U(y,0), (0,y) \in \overline{OB}; \qquad (3)$$

5) $$U(x,y) = 0, (x,y) \in \overline{OD}. \qquad (4)$$

P_λ масалада топилиши талаб этилаётган λ сон ва унга мос $U(x,y) \not\equiv 0$ функция P_λ масаланинг хос сони ва хос функцияси дейилади.

$U(x,y) \not\equiv 0$ функция P_λ масаланинг бирор хос сони λ га мос хос функцияси бўлсин. У ҳолда уни Ω_1 соҳада (1) тенгламанинг (4) ва $U_y(x,0) = \nu(x),\ 0<x<1$ шартни қаноатлантирувчи ечими сифатида

$$U(x,y) = \int_0^{x+y} \nu(t) J_0\left[\sqrt{\lambda(x+y-t)(x-y-t)}\right] dt \qquad (5)$$

кўринишида ёзиш мумкин [1], бу ерда $J_k(z) - k$ - тартибли биринчи тур Бессель функцияси.

(5) функцияда $y=0$ десак

$$U(x,0) = \int_0^x \nu(t) J_0\left[\sqrt{\lambda}(x-t)\right] dt, \quad 0 \le x \le 1 \qquad (6)$$

муносабат келиб чиқади.

Шундай қилиб, P_λ масала қуйидаги эллиптик масалага эквивалент келтирилди: λ нинг шундай қийматлари топилсинки, (1) тенгламанинг

$C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega_0 \cup OA) \cap C^2(\Omega_0)$ синфга тегишли ва (2), (3), (6) шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган ечимлари мавжуд бўлсин.

Бу масала ечимини $U(x,y) = R(r)\hat{O}(\omega)$ кўринишда қидирамиз, бу ерда

$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, 0<r<1, 0<\varphi<\pi/2$. Унда

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (\lambda r^2 - \mu^2)R(r) = 0,\ 0<r<1; \qquad (7)$$

$$R(0) = 0,\ R(1) = 0, \qquad (8)$$

$$\hat{O}''(\varphi)+\mu^2\hat{O}(\varphi)=0,\ 0<\varphi<\pi/2; \tag{9}$$

$$\hat{O}(0)=\hat{O}(\pi/2), \tag{10}$$

$$R(x)\hat{O}(0)=\hat{O}'(0)\int_0^x t^{-1}R(t)J_0[\sqrt{\lambda}(x-t)]dt,\ \ 0\le x\le 1 \tag{11}$$

шартларга эга бўламиз, бу ерда μ - сонли параметр.

(7) тенгламанинг $R(0)=0$ шартини қаноатлантирувчи ечими

$$R(r)=J_\mu(\sqrt{\lambda}r),\operatorname{Re}\mu>0 \tag{12}$$

функциядан иборат. Буни (11) га қўйиб ва ҳосил бўлган интегрални

$\int_0^a \frac{1}{x}J_k(ca-cx)J_\nu(cx)dx=\frac{1}{\nu}J_{k+\nu}(ca)$ $(a,\operatorname{Re}\nu>0,\operatorname{Re}k>-1)$ формула буйича ҳисоблаб

$$\hat{O}'(0)-\mu\hat{O}(0)=0 \tag{13}$$

шартга эга бўламиз.

Кўрсатиш қийин эмаски [2], {(9),(10),(13)} масала $\mu_n=2n+\left[(-1)^n-1\right],n=1,2,...$ (14)

бўлганда тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлиб , бу ечимлар

$$\hat{O}_n(\varphi)=c_n\sin(\mu_n\varphi+\pi/4),n=1,2,... \tag{15}$$

кўринишига эга ,бу ерда $C_n\neq 0$ -ихтиёрий сонлар. (14) ни (12) га қўйиб сўнгра $R(1)=0$ шартга бўйсундирсак, $J_{\mu_n}(\sqrt{\lambda})=0,n=1,2,...$ тенгламага эга бўламиз. $\mu_n>0$ бўлгани учун бу тенгламалар саноқли сондаги хақиқий илдизларга эга [2]. $\alpha_{n,m}$ – орқали уларнинг m -мусбат илдизини белгиласак P_λ масаланинг

$$\lambda_{n,m}=\alpha^2{}_{n,m,}\qquad n,m=1,2... \tag{16}$$

хос сонларига эга бўламиз.

(12), (15), (16) га асосан P_λ масаланинг Ω_0 сохадаги хос функцияларига эга бўламиз :

$$U_{n,m}(x,y)=c_{n,m}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}r)\sin(\mu_n\varphi+\pi/4),n,m=1,2,..., \tag{17}$$

бу ерда $c_{n,m}\neq 0$ - ихтиёрий сонлар.

Бу тенгликлардан келиб чиқадики,

$$U_{n,m}(x,0)=(c_{n,m}/\sqrt{2})J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}x), \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}U_{n,m}(x,0)=(c_{n,m}/\sqrt{2})\mu_n\frac{1}{x}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}x). \tag{19}$$

Маълумки [1]

$$U(x,y)=\left[k_1\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\rho/2}+k_2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\rho/2}\right]J_\rho\left(\sqrt{\lambda(x^2-y^2)}\right),\qquad \operatorname{Re}\rho>0 \tag{20}$$

функция (1) тенгламани Ω_1 соҳада қаноатлантиради, бу ерда k_1 ва k_2 – ихтиёрий сонлар. (20) да $\rho=\mu_n,\lambda=\alpha_{n,m}^2,k_1=0,k_2=(c_{n,m}/\sqrt{2})$. десак, у ҳолда (1) тенгламанинг (18) ва (19) шартларни қаноатлантирувчи Ω_1 соҳадаги ечимига эга бўламиз:

$$U_{n,m}(x,y)=c_{n,m}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}J_{\mu_n}\left[\alpha_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}\right],n,m=1,2,... \qquad (21)$$

Шундай қилиб, (17) ва (21) ларга асосан P_λ масаланинг хос функцияларига эга бўламиз:

$$U_{n,m}(x,y)=\begin{cases}c_{n,m}\sin(\mu_n\varphi+\pi/4)J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}r), & (x,y)\in\Omega_0;\\ \left(c_{n,m}/\sqrt{2}\right)\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^{\mu_n/2}J_{\mu_n}(\alpha_{n,m}\sqrt{x^2-y^2}), & (x,y)\in\Omega_1.\end{cases}$$

Худди [1] даги каби қуйидаги теоремалар ўринли эканини исботлаш мумкин.

1-теорема. P_λ масаланинг (22) хос функциялар системаси $L_2(\Omega_0)$ фазода тўла.

2-теорема. P_λ масаланинг (22) хос функциялар системаси $L\ (\Omega_1)$ фазода тўла.

3- теорема. P_λ масаланинг (22) хос функциялар системаси $L\ (\Omega\ )$ фазода тўла эмас.

1-теореманинг исботи [3] дан фойдаланиб исботланадиган қуйидаги леммага асосланади:

Лемма. $\{\sin(\mu_n\varphi+\pi/4)\}_{k=1}^{\infty}$ система $L_2(0,\pi/2)$ фазода тўла.

Изоҳ. Бу ерда олинган илмий натижалар ёрдамида қуйидаги масалалар ечимларини қатор кўринишида қуриш мумкин.

1-масала. Қуйидаги шартларни қаноатлантрувчи $U(x,y)$ функция топилсин:

1) $U(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega\setminus OA)$;

2) Ω_0 ва Ω_1 соҳаларда $U_{xx}+(signy)U_{yy}=0$ тенгламанинг регуляр ечими;

3) $U(x,y)=f(\varphi),(x,y)\in\bar{\sigma}_0;\qquad U(x,y)\equiv 0,(x,y)\in\overline{OB}\cup\overline{OD},$ бу ерда $\varphi=\widehat{n,x}$.

2- масала. 1-масаланинг 1) ва 3) шартларини хамда

$U_{xx}+(signy)U_{yy}+\lambda u=0$ тенгламани Ω_0 ва Ω_1 сохаларда қаноатлантрувчи $U(x,y)$ функция топилсин.

Фойдаланилган адабиётлар :

1. Сабитов К.Б., Хасанова С.Л. Решения задачи Трикоми-Неймана для уравнения Лаврентьева–Бицадзе методом спектрального анализа // Известия КБНЦ РАН.- № 1(8).- 2002.- С.84-93

2. Салоҳиддинов М.С. Математик физика тенгламалари.- Т.: Ўзбекистон, 2002.- Б.448

3. Моисеев Е.И. О базисности одной системы синусов // Дифференциальные уравнения.- 1987.- № 1.- С.177-179

Андижон давлат университети,
2009 йил 23 декабрда қабул қилинган.
(Тақризчи: ф.-м.ф.д. Ғ.Мўминов)