ОЦЕНКИ РАЗНОСТНЫХ ПСЕВДОМОМЕНТНОВ В ЗОНАХ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИИ И О ВЕРОЯТНОСТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

С.А.АХМЕДОВ

Ушбу мақолада семиинвариантлар учун Статулявичус шарти бажарилганда айирмали псевдомоментлар ва эҳтимолликлар учун баҳолар топилган.

In this paper proved some general estimates for $\chi_s(\eta, N)$ *and* $P(\eta \geq x)$ *under the Statulevičuis condition:* $\left|\Gamma_k\{\eta\}\right| \leq H(k!)^{1+\gamma} / \Delta^{k-2}, k = 3,4,\ldots, \gamma \geq 0, \Delta > 0, H > 0$.

Рассмотрим случайную величину (сл.в.) $\eta = \eta_\Delta$, зависящую от параметра Δ, с функцией распределения $F_\eta(x) = P(\eta < x)$ с средним $E\eta = 0$ и дисперсией $D\eta = 1$.

Обозначим $\Gamma_k\{\eta\}$ – семиинвариант k-го порядка сл.в. η, $\Phi(x) = P(N < x)$ - $(0,1)$ нормальное распределение, $\chi_s(\eta, N) = s\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{s-1} \left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right| dx$ – разностные псевдомоменты порядка $s \geq 1$.

Предположим, что существуют постоянные $\gamma \geq 0, H > 0, \Delta > 0$ такие, что выполнено условие Статулявичуса:

$$\left|\Gamma_k\{\eta\}\right| \leq H(k!)^{1+\gamma} / \Delta^{k-2}, k = 3,4,\ldots, l \qquad (S_\gamma)$$

В настоящей работе получены некоторые общие оценки для величин $\chi_s(\eta, N)$ и $P(\eta \geq x)$ при условии (S_γ).

Оценка для $\chi_s(\eta, N)$ опирается на общие неравномерные оценки для величины $\left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right|$, полученным использованием общую лемму о вероятностях больших уклонений [1], а также на экспоненциальные оценки распределения сл.в. [2].

Оценка для $P(\eta \geq x)$ полученная в заметке восходит из одной оценки Нагаева–Фука [3] (см. [3], § 4, Следствие 4) и примыкает к некоторым результатам работ [4], [5] и [6] (см. [6], Теорема 2.3.1). При этом использована оценка для $\chi_s(\eta, N)$ и равномерная оценка:

$$\varepsilon = \sup_x \left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right| \leq 18 / \Delta_\gamma, \quad (1)$$

где $\Delta_\gamma = c_\gamma \Delta^{1/(1+2\gamma)}, c_\gamma = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^{1/(1+2\gamma)}$ полученная в [7], при условии (S_γ).

Отметим, что аналог оценок Нагаева–Фука для сумм слабо зависимых сл.в. обсуждались, напри-

$\chi_s(\eta, N)$ и

$P(\eta \geq x)$ получаются при выполнении условия (S_γ).

Лемма 1. Пусть сл.в. η с $E\eta = 0$ и $D\eta = 1$ выполнено условие (S_γ). Тогда

1) при $0 \leq x \leq 1$

$$\left|F_\eta(-x) - \Phi(-x)\right| \leq \left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right| \leq c(\delta,\gamma)\Big/\Delta^{1/(1+2\gamma)}, \quad (2.1)$$

где $c(\delta,\gamma) = \dfrac{2160}{\delta}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^{1/(1+2\gamma)}\left(1 + \dfrac{2560}{\delta^4 e^4}\right),\ 0 < \delta < 1;$

2) при $1 \leq x \leq \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$

$$\left|F_\eta(-x) - \Phi(-x)\right| \leq \left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right| \leq \frac{c(\delta,\gamma)}{\sqrt{2\pi}} \frac{x^3 \exp\left\{-x^2/2\right\}}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Используя общую лемму о вероятностях больших уклонений [1], в интервале $1 \leq x \leq \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$ можно получить следующую оценку:

$$\left|F_\eta(-x) - \Phi(-x)\right| \leq \left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right| \leq \left(1 - \Phi(x)\right)\left\{\left|1 - \exp\left\{L_\gamma(x)\right\}\right| +\right.$$

$$\left. + \left|1 - \exp\left\{L_\gamma(x)\right\}\right| \cdot \left|f_j(x)\right| \cdot \frac{x+1}{\Delta_\gamma} + \left|f_j(x)\right| \frac{x+1}{\Delta_\gamma}\right\}. \quad (3)$$

Здесь $L_\gamma(x) = \sum_{3 \leq i < q} \lambda_i x^i + \theta\left(x/\Delta_\gamma\right)^3$, $q = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma} + 2, & \gamma > 0 \\ \infty, & \gamma = 0, |\theta| < 1 \end{cases}$,

λ_i выражаются через семиинварианты сл.в. η, причем

$$L_\gamma(\pm x) \leq \frac{x^3}{2\left(x + 8\Delta_\gamma\right)}, \quad (4)$$

$f_j(x) = \dfrac{60\left(1 + 10\Delta_\gamma^2 \exp\left\{1 - x/\Delta_\gamma\right\}\sqrt{\Delta_\gamma}\right)}{1 - x/\Delta_\gamma}$, $j = 1,2$ Δ_γ приведено в (1).

Пусть далее $0 \leq x \leq \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$. Тогда используя (4) легко проверить, что $L_\gamma(\pm x) \leq \dfrac{1}{2}$ и следовательно

$$\left|1 - \exp\left\{L_\gamma(\pm x)\right\}\right| \leq 2\left|L_\gamma(\pm x)\right| \leq \frac{x^3}{x + 8\Delta_\gamma}. \quad (5)$$

Обозначим $\delta = \inf_{\Delta}\left(1 - 1\Big/\sqrt[3]{\Delta_\gamma^2}\right)$, причем при достаточно больших $\Delta > 0$ можно показать, что $0 < \delta < 1$.

Далее при $0 \le x \le \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$, элементарным путем получим

$$\left|f_j(x)\right| \le \frac{60}{\delta}\left(1 + \frac{2560}{\delta^4 e^4}\right), j = 1,2. \tag{6}$$

Пусть теперь $0 \le x \le 1$, то используя (5) и (6) из (3) получим (2.1). Если $0 \le x \le \sqrt[3]{\Delta_\gamma}$, то имея ввиду, что

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \le \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-x^2/2\right\}, \tag{7}$$

(см. [10], стр. 192), используя также (5) и (6) из (3) получим (2.2).
Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть сл.в. η с $E\eta = 0$ и $D\eta = 1$ выполнено условие (S_γ). Тогда существует постоянная $c(\delta,\gamma)$, что имеет место оценка:

$$\chi_s(\eta, N) \le c(\delta,\gamma)\Big/\Delta^{1/(1+2\gamma)}. \tag{8}$$

Доказательство. Имеем

$$\chi_s(\eta,N) = s\int_{|x|\le\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}|x|^{s-1}\left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right|dx + s\int_{|x|>\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}|x|^{s-1}\left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right|dx \le$$

$$\le s\int_{|x|\le\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}|x|^{s-1}\left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right|dx + s\int_{|x|>\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}|x|^{s-1}P(N \ge x)\,dx + s\int_{|x|>\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}|x|^{s-1}P(\eta \ge x)\,dx =$$

$$= J_1 + J_2 + J_3. \tag{9}$$

Далее J_1 оценим через (2.1) и (2.2). J_2 при помощи (7), а J_3 оценкой полученной в [2]: Если выполнено условие (S_γ), то для всех $x \ge 0$

$$P(\pm\eta \ge x) \le \exp\left\{-x^2/4H\right\}, \text{ если } 0 \le x \le \left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}; \tag{10}$$

$$P(\pm\eta \ge x) \le \exp\left\{-\frac{1}{4}(x\Delta)^{1/(1+2\gamma)}\right\}, \text{ если } x \ge \left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}. \tag{11}$$

Оценим J_1. Используя (2.1) и (2.2) имеем

$$J_1 = s\int_{-1}^{1}|x|^{s-1}\left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right|dx + s\int_{1<|x|\le\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}|x|^{s-1}\left|F_\eta(x) - \Phi(x)\right|dx \le$$

$$\le \frac{s\,c(\delta,\gamma)}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}\left(\frac{2}{s} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{s+2}\exp\left\{-x^2/2\right\}dx\right) \le \frac{4s\,c(\delta,\gamma)}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{s+2}\exp\left\{-x^2/2\right\}dx.$$

Так как

$$E\left|N\right|^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{2^{m/2}\left(\dfrac{m}{2}\right)!}, \ m-\text{четное}; \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,2^{(m-1)/2}\left(\dfrac{m-1}{2}\right)!, \ m-\text{нечетное}. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда взяв (12) $m = s+2$ получим

$$J_1 \le \frac{c_i(s,\gamma)}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}, i = 1,2, \tag{13}$$

где $c_i(s,\gamma) = \begin{cases} \dfrac{4s\,c(\delta,\gamma)(s+2)!}{2^{(s+2)/2}\left(\dfrac{s+2}{2}\right)!}, \ s-\text{четное}, \ i=1; \\ 4s\,c(\delta,\gamma)\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,2^{(s+1)/2}\left(\dfrac{s+1}{2}\right)!, \ s-\text{нечетное}, \ i=2; \end{cases}$

Оценим J_2. Используя (7) получим

$$J_2 \le \frac{2s}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} x^{s-2}\exp\left\{-x^2/2\right\}dx.$$

Известно (см. стр. 176 в [11]), что

$$\int\limits_a^{\infty} x^p \exp\left\{-x^2/2\right\}dx \sim a^{p-1}\exp\left\{-a^2/2\right\}, \ a\to\infty. \tag{14}$$

Поэтому

$\int\limits_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} x^{s-2}\exp\left\{-x^2/2\right\}dx \sim \left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{s-3}\exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma^2}/2\right\}$ при достаточно больших Δ_γ выражение

$J_{2s}\left(\Delta_\gamma\right) = \left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{3-s}\exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma^2}/2\right\}\int\limits_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty} x^{s-2}\exp\left\{-x^2/2\right\}dx$ ограничена.

Обозначим $C_{2s} = \sup\limits_{\Delta_\gamma \ge 1} J_{2s}\left(\Delta_\gamma\right)$.

Тогда

$$J_2 \le \frac{2s\,C_{2s}}{\sqrt{2\pi}\,\Delta_\gamma}\left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^s \exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma^2}/2\right\}. \tag{15}$$

Функция $M_{2s}\left(\Delta_\gamma\right)=\left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^s\exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma^2}\,/2\right\}$ достигает максимума при $\Delta_\gamma\geq 1$. Обозначим

$$M_{2s}=\sup_{\Delta_\gamma\geq 1}M_{2s}\left(\Delta_\gamma\right). \tag{16}$$

Учитывая (16) из (15) имеем

$$J_2\leq\frac{2s\,C_{2s}\,M_{2s}}{\sqrt{2\pi}\,c_\gamma}\frac{1}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}. \tag{17}$$

Оценим теперь J_3. Используем (10) и (11).
Пусть

$$\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\leq\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}.$$

Тогда

$$J_3\leq 2s\int\limits_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}}x^{s-1}P\left(\eta\geq x\right)dx+2s\int\limits_{\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}}^{\infty}x^{s-1}P\left(\eta\geq x\right)dx\leq$$

$$\leq 2s\int\limits_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty}x^{s-1}\exp\left\{-x^2/4H\right\}dx+2s\int\limits_{\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}}^{\infty}x^{s-1}\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(x\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}\right\}dx=J_3'+J_3''.$$

Для оценки J_3' еще раз используем (14). Имеем

$$\int\limits_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty}x^{s-1}\exp\left\{-x^2/4H\right\}dx=\left(\sqrt{2H}\right)^s\int\limits_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)^{s-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)^2/2\right\}d\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)\sim$$

$$\sim\left(\sqrt{2H}\right)^s\left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{s-2}\exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma^2}\,/2\right\}.$$

Обозначим $C_{3s}'=\sup_{\Delta_\gamma\geq 1}J_{3s}'\left(\Delta_\gamma\right)$, $M_{3s}'=\sup_{\Delta_\gamma\geq 1}M_{3s}'\left(\Delta_\gamma\right)$,

где $J_{3s}'\left(\Delta_\gamma\right)=\left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{2-s}\exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma^2}\,/2\right\}\int\limits_{\sqrt[3]{\Delta_\gamma}}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)^{s-1}\exp\left\{-\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)^2/2\right\}d\left(\frac{x}{\sqrt{2H}}\right)$,

$$M_{3s}'\left(\Delta_\gamma\right)=\left(\sqrt[3]{\Delta_\gamma}\right)^{s+1}\exp\left\{-\sqrt[3]{\Delta_\gamma^2}\,/2\right\}.$$

Тогда

$$J_3'\leq 2s\left(\sqrt{2H}\right)^s C_{3s}'M_{3s}'\Big/c_\gamma\Delta^{1/(1+2\gamma)}. \tag{18}$$

Для оценки J_3'' используем следующее асимптотическое соотношение (см. [12], стр. 35)

$$\int\limits_a^{\infty}x^{p-1}\exp\left\{-\beta x^\mu\right\}dx\sim\frac{1}{p}a^p\exp\left\{-\beta a^\mu\right\},\ a\to\infty. \tag{19}$$

Взяв $p=s,\ \beta=\frac{1}{4},\ a=\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}$, $\mu=\frac{1}{1+2\gamma}$ из (19) имеем

$$J_3'' \sim \frac{2s}{\Delta^s}\frac{1}{s}\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{s/(1+2\gamma)}\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)^2}\right\}.$$

Обозначим $C_{3s}''=\sup\limits_{\Delta\ge 1}J_{3s}''\left(\Delta\right),\ M_{3s}''=\sup\limits_{\Delta\ge 1}M_{3s}''\left(\Delta\right),$

где

$$J_{3s}''\left(\Delta\right)=\frac{s\exp\left\{\frac{1}{4}\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)^2}\right\}}{\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{s/(1+2\gamma)}}\int\limits_{\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}}^{\infty}\left(x\Delta\right)^{s-1}\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(x\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)}\right\}d\left(x\Delta\right),$$

$$M_{3s}''\left(\Delta\right)=\Delta^{(1-2s\gamma)/(1+2\gamma)}\exp\left\{-\frac{1}{4}\left(H^{1+\gamma}\Delta\right)^{1/(1+2\gamma)^2}\right\}$$

Тогда

$$J_3''\le 2sH^{s(1+\gamma)/(1+2\gamma)}C_{3s}''M_{3s}''\Big/\Delta^{1/(1+2\gamma)}. \qquad (20)$$

Итоге из (18) и (20) получим

$$J_3\le 2s\left(\frac{\left(\sqrt{2H}\right)^s}{c_\gamma}C_{3s}'M_{3s}'+H^{s(1+\gamma)/(1+2\gamma)}C_{3s}''M_{3s}''\right)\frac{1}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}. \qquad (21)$$

Окончательно используя (13), (17) и (21) из (9) получим (8):

$$\chi_s\left(\eta,N\right)\le\left(c_i\left(s,\gamma\right)+\frac{2sC_{2s}M_{2s}}{\sqrt{2\pi}\,c_\gamma}+\right.$$

$$\left.+2s\left(\frac{\left(\sqrt{2H}\right)^s}{c_\gamma}C_{3s}'M_{3s}'+H^{s(1+\gamma)/(1+2\gamma)}C_{3s}''M_{3s}''\right)\right)\frac{1}{\Delta^{1/(1+2\gamma)}}=c\left(s,\gamma\right)\Big/\Delta^{1/(1+2\gamma)}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть сл.в. η с $E\eta=0$ и $D\eta=1$ выполнено условие (S_γ), то для произвольного $x>0$, $s\ge 2$ имеет место оценка:

$$P\left(\eta\ge x\right)\le 1-\Phi\left(\left(1-\alpha\right)x\right)+c_1\exp\left\{-c_2x^2\Big/K_2\left(x,\alpha\right)\right\}+c_3K_s\left(x,\alpha\right) \qquad (22)$$

Здесь $K_2\left(x,\alpha\right)=\left(C\left(s,\gamma\right)+c_4 18^{1+s}\right)\Big/\alpha^s x^s\,\Delta^{1/(1+2\gamma)}$, $s\ge 2$,

где c_1,c_2,c_3,c_4 – некоторые постоянные, $0<\alpha<1$.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы Нагаева–Фука–Боровкова (см. учебное пособие

[6],Теорема 2.3.2) можно заметить, что аналог оценки Нагаева–Фука для одной сл.в. ξ имеет следующий вид:

$$P\left(\xi \ge x\right) \le c_1 \exp\left\{-c_2 x^2 / \sigma^2\right\} + c_3 E\left|\xi\right|^s / x^s , \qquad (23)$$

где $c \ge 2,\ c_2 = \dfrac{1}{8e^s},\ c_3 = 2^s e,\ c_1 : \exp\left\{-c_2 x^2 / B^2\left(-\infty, x/c\right)\right\} \le c_1 \exp\left\{-c_2 x^2 / \sigma^2\right\},$

$$B^2\left(-\infty, x/c\right) = \int_{-\infty}^{x/c} u^2 dF_\xi\left(u\right).$$

Отметим, что в [6] взята $c = 4$, а в [3] $c = 2$.

Если рассмотрим нормированную сл.в. $\eta = \xi/\sigma$ и $c = 2$, то (23) имеет следующий вид:

$$P\left(\xi \ge x\right) \le c_1 \exp\left\{-c_2 x^2\right\} + c_3 E\left|\xi\right|^s / \sigma^s x^s . \qquad (24)$$

Теперь правую часть (24) выразим через псевдомоменты. Следуя [4] обозначим, $\hat{\eta} = F_\eta^{-1}\left(Z\right), \hat{N} = \Phi^{-1}\left(Z\right),$

где Z – равномерно распределенная сл.в. в $\left(0,1\right)$,

$F_\eta^{-1}\left(Z\right)$ – сл.в. с функцией распределения $F_\eta\left(x\right)$,

$\Phi^{-1}\left(Z\right)$ – сл.в. с функцией распределения $\Phi\left(x\right)$,

F^{-1}, Φ^{-1} – обратные функции соответственно к F и Φ.

Далее при $0 < \alpha < 1$ и $x > 0$ имеем

$$P\left(\eta \ge x\right) \le P\left(\hat{N} \ge \left(1-\alpha\right)x\right) + P\left(\hat{\eta} - \hat{N} \ge \alpha x\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\left(1-\alpha\right)x\right) + P\left(\hat{\eta} - \hat{N} \ge \alpha x\right) \qquad (25)$$

Оценивая $P\left(\hat{\eta} - \hat{N} \ge \alpha x\right)$ при помощи (23) имеем:

$$P\left(\hat{\eta} - \hat{N} \ge \alpha x\right) \le c_1 \exp\left\{-c_2 x^2 \alpha^2 / E\left|\hat{\eta} - \hat{N}\right|^2\right\} + c_3 E\left|\hat{\eta} - \hat{N}\right|^s / \alpha^s x^s . \qquad (26)$$

Поставляя (26) в (25) получим

$$P\left(\eta \ge x\right) \le 1 - \Phi\left(\left(1-\alpha\right)x\right) + c_1 \exp\left\{-c_2 x^2 \alpha^2 / E\left|\hat{\eta} - \hat{N}\right|^2\right\} +$$

$$+ c_3 E\left|\hat{\eta} - \hat{N}\right|^s / \alpha^s x^s . \qquad (27)$$

Для оценки используем результат А.В.Булинского (см. [6], Теорема 2.3.1):

$$E\left|\hat{\eta} - \hat{N}\right|^s \le \chi_s\left(\eta, N\right) + c_5 \varepsilon^{1+s},\ s \ge 1,\ c_5 = const . \qquad (28)$$

Поставляя (28) в (27), используя оценки (21) и (8) получим утверждение (22) леммы 3.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рудзкис Р., Саулис Л., Статулявичус В. Общая лемма о вероятностях больших уклонений. // Литовск. матем. сб.- 1978.- Т. XVIII, № 2.- С. 99-116.
2. Бенткус Р., Рудзкис Р. Об экспоненциальных оценках распределения случайных величин. // Литовск. матем. сб.- 1980.- Т. XX, № 1. - С. 15-30.
3. Нагаев С.В., Фук Д.Х. Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин. // Теория вероятн. и ее примен.- 1971.- Т. XVI, № 4.- С. 660-674.
4. Эбралидзе Ш.С. Неравенства для вероятностей больших уклонений в терминах псевдомоментов. // Теория вероятн. и ее примен.- 1971.- Т. XVI, № 4.- С. 760-764.
5. Боровков А.А. Замечания о неравенствах для сумм независимых величин. // Теория вероятн. и ее примен.- 1972.- Т. XVII, № 3.- С. 588-590.
6. Булинский А.В. Предельные теоремы для случайных процессов и полей: Учебное пособие. –М.: Изд-во МГУ, 1981.- 64 с.
7. Саулис Л. Общие леммы об аппроксимации нормальным распределением. // Литовск. матем. сб.- 1981.- Т. XXI, № 2.- С. 175-189.
8. Утев С.А. Неравенства для сумм слабо зависимых случайных величин и оценки скорости сходимости в принципе инвариантности. // Предельные теоремы для сумм случайных величин.– Новосибирск: Наука,1984.- Т. III.- С. 50-77.
9. Sunklodas J. Probability inequalities for sums of weakly dependent random variables. // Ziet. matem. rink. 1992. B. 32, № 3., P/ 426-434.
10. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I. –М., Мир. 1984. 528 с.
11. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.– М.: Наука, 1987.- 320 с.
12. Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987.- 544 с..

Андижон давлат университети,
2009 йил 10 декабрда қабул қилинган.
(Тақризчи: ф.-м.ф.д. Ғ.Мўминов)