БАЪЗИ СИНГУЛЯР-ТОЙИГАН, СТАЦИОНАР БЎЛМАГАН, ЧИЗИҚЛИ ЙИРИК МАСШТАБЛИ СИСТЕМАЛАР ТУРҒУНЛИГИНИНГ ТАҲЛИЛИ

В.Ғ.МИЛАДЖОНОВ, К.Х.ТУРҒУНОВА, Ш.Х.ХОЖАМБЕРДИЕВ

В данной работе изложен способ анализа устойчивости некоторых сингулярно-возмущённых, не стационарных линейных крупномасштабных ситем.

In this job research method analys stobility of some singular non starsiounar eaner large-seala system.

1-ҳол. Аввал қуйидаги системани қараймиз:

$$\dot{x} = A_{11}(t)x + A_{12}(t)y \ ; \qquad 1)$$

$$\mu\dot{y} = \mu A_{21}(t)x + A_{22}(t)y \ ; \qquad (2)$$

бу ерда, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$, $A_{21}(t)$, $A_{22}(t)$ - лар мос ўлчовли ўзгарувчи матрицалар, $\mu \in]0,1]$ - етарли кичик мусбат параметр.

Бу система мувозанат ҳолати турғунлигининг етарли шартларини ҳосил қилиш учун (1) ва (2) тенгламаларни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\dot{x} = \left[\sum_{i=0}^{s}\alpha_i(t)A_{11}^i\right]x + \left[\sum_{i=s+1}^{k}\alpha_i(t)A_{12}^i\right]y \ ; \qquad (3)$$

$$\mu\dot{y} = \mu\left[\sum_{j=0}^{p}\beta_j(t)A_{21}^j\right]x + \left[\sum_{j=p+1}^{r}\beta_j(t)A_{22}^j\right]y \ ; \qquad (4)$$

бу ерда, A_{11}^i, A_{12}^i, A_{21}^j, A_{22}^j - мос ўлчовли ўзгармас матрицалар, $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t)$ - чизиқли боғлиқ бўлмаган, қатъий мусбат функциялар бўлиб, уларнинг қатъий мусбатлик тартиби мос равишда ε_{1i}, ε_{2j}, яъни $\alpha_i(t) > \varepsilon_{1i}$,>0, $\beta_j(t) > \varepsilon_{2j}$ >0, $i = 1,2,...,k$, $j = 1,2,...r$, $\alpha_0(t) = \beta_0(t) = 1$.

(3) ва (4) системалар учун Ляпунов матрица функцияси элементларини қуйидагича танлаймиз.

$$V_{11}(x) = x^T B_1 x \ ; \ V_{22}(y,\mu) = \mu y^T B_2 y \ ; \ V_{12}(x,y,\mu) = \mu x^T B_3 y \qquad (5)$$

бу ерда B_1, B_2 - симметрик мусбат аниқланган матрицалар, B_3 -ўзгармас матрица. У ҳолда Ляпунов функцияси қуйидаги кўринишда бўлиб:

$$, \qquad V(x,y,\mu) = \eta^T U(x,y,\mu)\eta \qquad (6)$$

бу ерда $\eta^T = (\eta_1, \eta_2)$, η_1 >0, η_2 >0,

$$U(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} V_{11}(x) & V_{12}(x,y,\mu) \\ V_{12}(x,y,\mu) & V_{22}(y,\mu) \end{pmatrix},$$

бу функция учун қуйидаги баҳо ўринли бўлади:

$$V(x,y,\mu) > u^T H^T A(\mu) H u,$$

бу ерда

$$u^T = \left(\|x\|, \|y\|\right); \ H = diog\left(\eta_1, \eta_2\right); \ A(\mu) = \begin{bmatrix} \lambda_m(B_1) & -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3 B_3^T) \\ -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3 B_3^T) & \mu\lambda_m(B_2) \end{bmatrix}$$

(5) функциялардан (3) ва (4) системалар ёрдамида олинган ҳосилалар учун қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$\dot{V}_{11}(x) \le \sum_{i=0}^{s}\alpha_i(t)\lambda_M\left(A_{11}^{i^T}B_1 + B_1 A_{11}^i\right)\|x\|^2 + 2\sum_{i=s+1}^{k}\alpha_i(t)\lambda_M^{1/2}\left((B_1 A_{12}^i)(A_{12}^{i^T}B_1)\right)\|x\|\|y\| \ ,$$

$$\dot{V}_{22}(y,\mu) \le \sum_{j=p+1}^{r} \beta_j(t)\lambda_M\left(A_{22}^{j^T}B_2 + B_2A_{22}^{j}\right)\|y\|^2 + 2\mu\sum_{j=0}^{p}\beta_j(t)\lambda_M^{1/2}\left((A_{21}^{j^T}B_2)(B_2A_{21}^{j})\right)\|x\|\|y\| \ ,$$

$$\dot{V}_{12}(\mu,x,y) \le \mu\sum_{j=0}^{p}\beta_j(t)\lambda_M\left(\frac{1}{2}\left(B_3A_{21}^{j} + A_{21}^{j^T}B_3^T\right)\right)\|x\|^2 + \mu\sum_{i=s+1}^{k}\alpha_i(t)\lambda_M\left(\frac{1}{2}(A_{12}^{i^T}B_3 + B_3A_{12}^{i})\right)\|y\|^2 +$$

$$+\left(\mu\sum_{i=0}^{s}\alpha_i(t)\lambda_M^{1/2}\left(\left(A_{11}^{i^T}B_3\right)\left(B_3^TA_{11}^{i}\right)\right) + \sum_{j=p+1}^{r}\beta_j(t)\lambda_M^{1/2}\left(\left(B_3A_{22}^{j^T}\right)\left(A_{22}^{j}B_3^T\right)\right)\right)\|x\|\|y\|$$

Бундан,

$$a_i = \begin{cases} \max\limits_t \alpha_i(t), & агар\ мос\ кўпайтувчи\ мусбат\ бўлса, \\ \varepsilon_{1i}, & агар\ мос\ кўпайтувчи\ манфий\ бўлса; \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} \max\limits_t \beta_j(t), & агар\ мос\ кўпайтувчи\ мусбат\ бўлса, \\ \varepsilon_{2j}, & агар\ мос\ кўпайтувчи\ манфий\ бўлса; \end{cases}$$

белгилашларни киритиб, (6) функциядан (3) ва (4) системалар ёрдамида олинган тўла ҳосила учун қуйидаги баҳони ҳосил қиламиз:

$$\dot{V}(x,y,\mu) \le u^T G(\mu)u \ , \qquad (7)$$

бу ерда $u^T = \left(\|x\|, \|y\|\right)$

$$G(\mu) = \begin{pmatrix} c_{11}+\mu d_{11} & c_{12}+\mu d_{12} \\ c_{12}+\mu d_{12} & c_{22}+\mu d_{22} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = \sum_{i=0}^{s} a_i\lambda_M\left(A_{11}^{i^T}B_1 + B_2A_{11}^{i}\right), \qquad d_{11} = 2\sum_{j=0}^{p} b_j\lambda_M\left(\frac{1}{2}\left(B_3A_{21}^{j} + A_{21}^{j^T}B_3^T\right)\right),$$

$$c_{12} = \sum_{i=s+1}^{k} a_i\lambda_M^{1/2}\left(\left(B_1A_{12}^{i}\right)\left(A_{12}^{i^T}B_1\right)\right) + \sum_{j=p+1}^{r} b_j\lambda_M^{1/2}\left(\left(B_3A_{22}^{j^T}\right)\left(A_{22}^{j}B_3^T\right)\right)$$

$$d_{12} = \sum_{j=0}^{p} b_j\lambda_M^{1/2}\left(\left(A_{21}^{j^T}B_2\right)\left(B_2A_{21}^{j}\right)\right) + \sum_{i=0}^{s} a_i\lambda_M^{1/2}\left(\left(A_{11}^{i^T}B_3\right)\left(B_3^TA_{11}^{i}\right)\right),$$

$$c_{21} = \sum_{j=p+1}^{r} b_j\lambda_M\left(A_{22}^{j^T}B_2 + B_2A_{22}^{j}\right), \quad d_{22} = 2\sum_{i=s+1}^{k} a_i\lambda_M\left(\frac{1}{2}\left(A_{12}^{i^T}B_3 + B_3^TA_{12}^{i}\right)\right),$$

Энди μ - етарли кичик параметрнинг юқори чегарасини топамиз. Бунинг учун $A(\mu)$ матрица мусбат аниқланган, $G(\mu)$ матрица эса манфий аниқланган бўлишлик шартларидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\mu_1 = \frac{\lambda_m(B_1)\cdot\lambda_m(B_2)}{\lambda_m\left(B_3B_3^T\right)}, \quad \mu_2 = -\frac{c_{11}}{d_{11}}, \quad \mu_3 = -\frac{c_{22}}{d_{22}}$$

$$\mu_4 = \frac{-\left(c_{11}d_{22} + c_{22}d_{11} - 2c_{12}d_{12}\right) + \sqrt{\left(c_{11}d_{22} + c_{22}d_{11} - 2c_{12}d_{12}\right)^2 - 4\left(d_{11}d_{22} - d_{12}^2\right)\left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right)}}{2\left(d_{11}d_{22} - d_{12}^2\right)}$$

$$\mu_0 = \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$$

Бундан кўринадики, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$, бўлиши учун

$$c_{11} < 0\,,\ c_{22} < 0\,,\ c_{11}c_{22} > c_{12}^2 \qquad (8)$$

шартлар бажарилиши керак.

Демак, (1) ва (2) системалар (3) ва (4) кўринишга келтирилган бўлиб, улар учун шундай (6) функцияни топиш мумкин бўлсаки, унда (7) тенгсизлик ва (8) шартлар бажарилса, у ҳолда (3) ва (4) (мос равишда (1) ва (2)) системалар мувозанат ҳолати x=0, y=0 $\mu \in]0, \mu_0]$ да ва $\mu \to 0$ да асимптотик турғун бўлади.

2-ҳол. Энди қуйидаги системани қараймиз:

$$\dot{x} = A_{11}(t)x + A_{12}(t)y\ ; \qquad (9)$$

$$\mu\dot{y} = A_{21}(t)x + A_{22}(t)y\ ; \qquad (10)$$

бу ерда, $x \in R^n$, $y \in R^m$, $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$, $A_{21}(t)$, $A_{22}(t)$ - лар мос ўлчовли ўзгарувчи матрицалар, $\mu \in]0,1]$ - етарли кичик мусбат параметр.

Бу система мувозанат ҳолати турғунлигининг етарли шартларини ҳосил қилиш учун (9) ва (10) тенгламаларни қуйидагича ўзгартирамиз:

$$\dot{x} = \left[\sum_{i=0}^{s}\alpha_i(t)A_{11}^i\right]x + \left[\sum_{i=s+1}^{k}\alpha_i(t)A_{12}^i\right]y\ ; \qquad (11)$$

$$\mu\dot{y} = \left[\sum_{j=0}^{p}\beta_j(t)A_{21}^j\right]x + \left[\sum_{j=p+1}^{r}\beta_j(t)A_{22}^j\right]y\ ; \qquad (12)$$

бу ерда, A_{11}^i, A_{12}^i, A_{21}^j, A_{22}^j - мос ўлчовли ўзгармас матрицалар, $\alpha_i(t)$, $\beta_j(t)$ - чизиқли боғлиқ бўлмаган, қатъий мусбат функциялар бўлиб, уларнинг қатъий мусбатлик тартиби мос равишда ε_{1i}, ε_{2j}, яъни $\alpha_i(t) > \varepsilon_{1i}$,>0, $\beta_j(t) > \varepsilon_{2j}$ >0, $i = 1,2,...,k$, $j = 1,2,...r$, $\alpha_0(t) = \beta_0(t) = 1.$

(11) ва (12) системалар учун Ляпунов матрица функцияси элементларини қуйидагича танлаймиз.

$$V_{11}(x) = x^T B_1 x\ ;\ V_{22}(y,\mu) = \mu y^T B_2 y\ ;\ V_{12}(x,y,\mu) = \mu x^T B_3 y \quad (13)$$

бу ерда B_1, B_2 - симметрик мусбат аниқланган матрицалар, B_3 -ўзгармас матрица. У ҳолда Ляпунов функцияси қуйидаги кўринишда бўлиб:

$$V(x,y,\mu) = \eta^T U(x,y,\mu)\eta\,, \qquad (14)$$

бу ерда $\eta^T = (\eta_1, \eta_2)$, $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$,

$$U(x,y,\mu) = \begin{pmatrix} V_{11}(x) & V_{12}(x,y,\mu) \\ V_{12}(x,y,\mu) & V_{22}(y,\mu) \end{pmatrix},$$

бу функция учун қуйидаги баҳо ўринли бўлади:

$$V(x,y,\mu) > u^T H^T A(\mu) H u\,,$$

бу ерда

$$u^T = \left(\|x\|, \|y\|\right);\ H = diog(\eta_1, \eta_2);\ A(\mu) = \begin{bmatrix} \lambda_m(B_1) & -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) \\ -\mu\lambda_M^{1/2}(B_3B_3^T) & \mu\lambda_m(B_2) \end{bmatrix}$$

(13) функциялардан (11) ва (12) системалар ёрдамида олинган ҳосилалар учун қуйидаги тенгсизликлар ўринли бўлади:

$$\dot{V}_{11}(x) \le \sum_{i=0}^{s} \alpha_i(t)\lambda_M(A_{11}^{i^T}B_1 + B_1A_{11}^i)\|x\|^2 + 2\sum_{i=s+1}^{k} \alpha_i(t)\lambda_M^{1/2}\left((B_1A_{12}^i)(A_{12}^{i^T}B_1)\right)\|x\|\|y\| ,$$

$$\dot{V}_{22}(y,\mu) \le \sum_{j=p+1}^{r} \beta_j(t)\lambda_M(A_{22}^{j^T}B_2 + B_2A_{22}^j)\|y\|^2 + \sum_{j=0}^{p} \beta_j(t)\lambda_M^{1/2}\left((A_{21}^{j^T}B_2)(B_2A_{21}^j)\right)\|x\|\|y\| ,$$

$$\dot{V}_{12}(\mu,x,y) \le \sum_{j=0}^{p} \beta_j(t)\lambda_M\left(\frac{1}{2}\left(B_3A_{21}^j + A_{21}^{j^T}B_3^T\right)\right)\|x\|^2 + \mu\sum_{i=s+1}^{k} \alpha_i(t)\lambda_M\left(\frac{1}{2}(A_{12}^{i^T}B_3 + B_3A_{12}^i)\right)\|y\|^2 +$$

$$+\left(\mu\sum_{i=0}^{s} \alpha_i(t)\lambda_M^{1/2}\left(\left(A_{11}^{i^T}B_3\right)\left(B_3^TA_{11}^i\right)\right) + \sum_{j=p+1}^{r} \beta_j(t)\lambda_M^{1/2}\left(\left(B_3A_{22}^{j^T}\right)\left(A_{22}^jB_3^T\right)\right)\right)\|x\|\|y\|$$

Бундан,

$$a_i = \begin{cases} \max\limits_t \alpha_i(t), & агар\ мос\ кўпайтувчи\ мусбат\ бўлса, \\ \varepsilon_{1i}, & агар\ мос\ кўпайтувчи\ манфий\ бўлса; \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} \max\limits_t \beta_j(t), & агар\ мос\ кўпайтувчи\ мусбат\ бўлса, \\ \varepsilon_{2j}, & агар\ мос\ кўпайтувчи\ манфий\ бўлса; \end{cases}$$

белгилашларни киритиб, (14) функциядан (11) ва (12) системалар ёрдамида олинган тўла ҳосила учун қуйидаги баҳони ҳосил қиламиз:

$$\dot{V}(x,y,\mu) \le u^TG(\mu)u , \qquad (15)$$

бу ерда $u^T = \left(\|x\|,\|y\|\right)$

$$G(\mu) = \begin{pmatrix} c_{11}+d_{11} & c_{12}+\mu d_{12} \\ c_{12}+\mu d_{12} & c_{22}+\mu d_{22} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = \sum_{i=0}^{s} a_i\lambda_M\left(A_{11}^{i^T}B_1 + B_2A_{11}^i\right)\lambda_M\left(\frac{1}{2}\left(B_3A_{21}^j + A_{21}^{j^T}B_3^T\right)\right),$$

$$c_{12} = \sum_{i=s+1}^{k} a_i\lambda_M^{1/2}\left(\left(B_1A_{12}^i\right)\left(A_{12}^{i^T}B_1\right)\right) + \sum_{j=p+1}^{r} b_j\lambda_M^{1/2}\left(\left(B_3A_{22}^{j^T}\right)\left(A_{22}^jB_3^T\right)\right) + \sum_{j=0}^{p} b_j\lambda_M^{1/2}\left(\left(A_{21}^{j^T}B_2\right)\left(B_2A_{21}^j\right)\right)$$

$$d_{12} = \sum_{i=0}^{s} a_i\lambda_M^{1/2}\left(\left(A_{11}^{i^T}B_3\right)\left(B_3^TA_{11}^i\right)\right),$$

$$c_{22} = \sum_{j=p+1}^{r} b_j\lambda_M\left(A_{22}^{j^T}B_2 + B_2A_{22}^j\right), \quad d_{22} = 2\sum_{i=s+1}^{k} a_i\lambda_M\left(\frac{1}{2}\left(A_{12}^{i^T}B_3 + B_3^TA_{12}^i\right)\right),$$

Энди μ - етарли кичик параметрнинг юқори чегарасини топамиз. Бунинг учун $A(\mu)$ матрица мусбат аниқланган, $G(\mu)$ матрица эса манфий аниқланган бўлишлик шартларидан фойдаланиб, қуйидагиларни топамиз:

$$\mu_1 = \frac{\lambda_m(B_1)\cdot\lambda_m(B_2)}{\lambda_m\left(B_3B_3^T\right)}, \quad \mu_2 = -\frac{c_{22}}{d_{22}}$$

$$\mu_3 = \frac{-\left(c_{11}d_{22} + c_{22}d_{11} - 2c_{12}d_{12}\right) + \sqrt{\left(c_{11}d_{22} + c_{22}d_{11} - 2c_{12}d_{12}\right)^2 - 4\left(d_{11}d_{22} - d_{12}^2\right)\left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right)}}{2\left(d_{11}d_{22} - d_{12}^2\right)}$$

$$\mu_0 = \min(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$$

Бундан кўринадики, $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$, бўлиши учун

$$c_{11} < 0\,,\ \ c_{22} < 0\,,\ \ c_{11}c_{22} > c_{12}^2 \qquad (16)$$

шартлар бажарилиши керак.

Демак, (9) ва (10) системалар (11) ва (12) кўринишга келтирилган бўлиб, улар учун шундай (14) функцияни топиш мумкин бўлсаки, унда (15) тенгсизлик ва (16) шартлар бажарилса, у ҳолда (11) ва (12) (мос равишда (9) ва (10)) системалар мувозанат ҳолати x=0, y=0 $\mu \in]0, \mu_0]$ да ва $\mu \to 0$ да асимптотик турғун бўлади.

Адабиётлар:

1. Grujic Lj.T,, Matrynyuk A.A., Ribbens - Pavella M. Large-Scale systems Stability under Structural and Singular perturbations.−Berlin.: Springer,1987.−366p.

2. Martyuk A.A., Miladzhanov V.G. On the structural stability of singularly perturbed large-scale systems. I. Engineering Simulation 11 (1993) 555-573.

3. Martyuk A.A., Miladzhanov V.G. On the structural stability of singularly perturbed large-scale systems. II. Engineering Simulation 12 (1994) 710-725.

4. Муллажонов Р.В. Анализ устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Проблема механики. − 2010. − №2.− С.4− 7.

5. Муллажонов Р.В., Каримжонов А. Анализ устойчивости нестационарные линейных КМС. // Труды международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль Хорезми 2009». том 1.– Т., 2009.− С.251−255.

Андижон давлат университети,
2012 йил 6 ноябрда қабул қилинган