МОДИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДВУХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

И.К.Хужаев, М.К.Махкамов

Ишда Пуассон тенгламасини тўғри бурчакли соҳада сонли ечиш усули таклиф этилган. Тенглама ва чегаравий шартлар координаталар бўйлаб иккинчи тартибли аниқликда аппроксимацияланган. Бир координата учун тўғри чизиқлар усули, иккинчи координата учун оддий қувиш усулининг қўлланилиши фиктив вақт киритмасдан ва кетма-кет яқинлашувдан фойдаланмасдан чекли айирмали тенгламалар доирасида аниқ ечим олиш имконини берган.

***Калит сўзлар**: Пуассон тенгламаси, тўғри чизиқлар усули, сонли усул, кетма-кет яқинлашиш, чекли айирмали тенгламалар.*

В работе предлагается численный метод решения уравнения Пуассона для прямоугольной области. Уравнения и граничные условия аппроксимированы вторым порядком точности по координатам. Совместное использование метода прямых по одной и простой прогонке по другой координате позволяет получить точное, в рамках конечно-разностных уравнений, решение относительно производной от давления по одной из координат без введения фиктивного времени и привлечения последовательного приближения.

***Ключевые слова**: уравнение Пуассона, метод прямых, численный метод, последовательное приближение, конечно-разностное уравнение.*

A numerical method for solving the Poisson equation for a rectangular domain is proposed in the article. Equations and boundary conditions are approximated by the second order of accuracy with respect to coordinates. The joint use of the method of lines for one coordinate and a simple sweep along another allows obtaining a precise, within the finite-difference equations, solution with respect to the derivative of the pressure along one of the coordinates without introducing a fictitious time and attracting a successive approximation.

***Key words**: Poisson equation, method of lines, numerical method, finite-difference equations, successive approximation.*

Безразмерное уравнение давления для двухмерной области в декартовой системе координат имеет вид уравнения Пуассона [1,2]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=S,$$

где $S=4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$.

Обезразмеривание переменных было проведено с помощью масштабных величин $lx,\ U,\ \frac{\rho U^2}{2}$. Приведенные выше и ниже уравнения имеют безразмерный вид.

Правую часть уравнения можно выразить через функцию тока [2]:

$$S=4\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)^2\right).$$

Условиями на твердых частях границы прямоугольного четырехугольника являются

при $x=0$ и $x=1$: $\frac{\partial p}{\partial x}=0,\ \frac{\partial p}{\partial y}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$;

при $y=0$ и $y=l$: $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \frac{\partial p}{\partial y}=0.$

Согласно граничным условиям, ожидаемый результат решения получится до точности аддитивной постоянной. Привлечение значения давления для конкретной точки расчетной области приводит к последовательному приближению или методу становления. Еще одно неудобство – согласование гранич ных условий. В [1,2] из первой группы граничных условий использовали второе условие $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, заменив $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ на $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$, а из второй группы условий использовали первое условие $\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, при этом $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ заменили на $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$. Т.е. граничные значения производных выразили через функцию завихренности, которая определена с применением методов установления или последовательного приближения с определенной точностью.

Остановимся на том, что решение надо получить до точности аддитивной постоянной. Притом, из приближенных граничных условий надо перейти к точному воспроизведению физических условий границ. Такое возможно при введении новой искомой функции

$$q(x,y)=\frac{\partial p(x,y)}{\partial x}.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}=\frac{\partial S}{\partial x},$$

где $\frac{\partial S}{\partial x}=4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$.

Граничные условия, в силу условия $\frac{\partial p}{\partial x}=0$ при $x=0$ и $x=1$, а также $\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=0$

в связи с условиями $\frac{\partial p}{\partial y}=0$ и $\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}=0$ при $y=0$ и $y=l$, принимаются в виде:

при $x=0$ и $x=1$: $q(x,y)=0.$

при $y=0$ и $y=l$: $\frac{\partial q(x,y)}{\partial y}=0.$

Чтобы облегчить запись, правую часть уравнения обозначим

$$f(x,y,t)=\frac{\partial S}{\partial x}.$$

Численный метод решения задачи.

По осям 0*x* и 0*y* введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_x=\left(x_i=ih_x,\ \ i=0,1,...,N_x,N_x+1;\ \ h_x=\frac{1}{N_x+1}\right),$$

$$\bar{\omega}_y=\left(y_j=jh_y,\ \ j=0,1,...,N_y,N_y+1;\ \ h_y=\frac{l}{N_y+1}\right).$$

Вводятся сеточные функции, например, $f(x,y)=f_{i,j}\ldots$

По оси $0x$ заданы точные значения искомой функции, поэтому по этой оси реализуем положения метода прямых [3,4]. По оси $0y$ заданы производные искомой функции, поэтому используем централь-

ную разность и процесс прогонки [5]. Соответственно, такой смешанный метод дает решение конечно-разностных уравнений в рамках машинной точности без последовательного приближения.

Во внутренних узлах $i = 2,3,...N_x - 2, N_x - 1$ производные по *x* аппроксимируются центральными разностями:

$$\frac{q_{i+1,j} - 2q_{i,j} + q_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{\partial^2 q_{i,j}}{\partial y^2} = f_{i,j},$$

где

$$f_{i,j} = 4\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2h_y} + \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} - \right.$$

$$\left. - \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4h_x h_y} \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h_x} - \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_y} \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{h_x^2} \right).$$

В частности, при $i = 1$ и $i = N_x$, реализуются граничные условия:

$$\frac{q_{2,j} - 2q_{1,j}}{h_x^2} + \frac{\partial^2 q_{1,j}}{\partial y^2} = f_{1,j},$$

$$\frac{-2q_{N_x,j} + q_{N_x-1,j}}{h_x^2} + \frac{\partial^2 q_{N_x,j}}{\partial y^2} = f_{N_x,j}.$$

Составим матричное уравнение

$$\frac{1}{h_x^2} A_j^{(x)} Q_j + \frac{\partial^2 Q_j}{\partial y^2} = F_j, \qquad (1)$$

где

$$Q_j = \left(q_{1,j},\ q_{2,j},\ \dots\ ,q_{N_x-1,j},\ q_{N_x,j} \right)^T,$$

$$A_j^{(x)} = \begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{Vmatrix}_{N_x},$$

$$F_j = \left(f_{1,j},\ f_{2,j},\ \dots\ ,f_{N_x-1,j},\ f_{N_x,j} \right)^T.$$

Верхний знак «*T*» означает операцию транспонирования матрицы. Индексы искомых и элементов матрицы меняются от 1 до N_x.

В [6] определены собственные значения

$$\lambda_s = -2\left(1 + \cos\frac{\pi s}{N_x + 1} \right),$$

а также элементы *s*-го собственного вектора

$$b_{s,p}^{(x)} = (-1)^{s+p} \sqrt{\frac{2}{N_x + 1}} \sin\frac{\pi sp}{N_x + 1}$$

трехдиагональной матрицы $A_j^{(x)}$.

Если составить с их помощью диагональную Λ_x и фундаментальную B_x матриц, то матрицу $A_j^{(x)}$ можно представить в виде [ ]:

$$A_j^{(x)} = B_x \Lambda_x B_x^{-1},$$

где B_x^{-1} – обратная B_x матрица, притом $B_x^{-1} = B_x$.

Умножим обе стороны уравнения (1) на B_x^{-1} слева и, учитывая свойство коммутативности операций умножения и дифференцирования матриц, получим

$$\frac{1}{h_x^2} B_x^{-1} A_j^{(x)} Q_j + \frac{\partial^2 B_x^{-1} Q_j}{\partial y^2} = B_x^{-1} F_j .$$

Введем новые вектор-столбцы

$$B_x^{-1} Q_j = B_x Q_j =$$

$$= \left(\sum_{p=1}^{N_x} b_{1,p}^{(x)} q_{p,j}^{n+1},\ \sum_{p=1}^{N_x} b_{2,p}^{(x)} q_{p,j}^{n+1}, ...,\ \sum_{p=1}^{N_x} b_{N_x-1,p}^{(x)} q_{p,j}^{n+1},\ \sum_{p=1}^{N_x} b_{N_x,p}^{(x)} q_{p,j}^{n+1} \right)^T =$$

$$= \left(\tilde{q}_{1,j},\ \tilde{q}_{2,j}, ...,\ \tilde{q}_{N_x-1,j},\ \tilde{q}_{N_x,j} \right)^T = \tilde{Q}_j ,$$

$$\tilde{F}_j = \left(\tilde{f}_{1,j},\ \tilde{f}_{2,j}, ...,\ \tilde{f}_{N_x-1,j},\ \tilde{f}_{N_x,j} \right)^T = B_x^{-1} F_j = B_x F_j =$$

$$= \left(\sum_{p=1}^{N_x} b_{1,p}^{(x)} f_{p,j}^{n+1},\ \sum_{p=1}^{N_x} b_{2,p}^{(x)} f_{p,j}^{n+1}, ...,\ \sum_{p=1}^{N_x} b_{N_x-1,p}^{(x)} f_{p,j}^{n+1},\ \sum_{p=1}^{N_x} b_{N_x,p}^{(x)} f_{p,j}^{n+1} \right)^T .$$

С учетом $A_j^{(x)} = B_x \Lambda_x B_x^{-1}$ преобразуется часть оставшегося члена

$$B_x^{-1} A_j^{(x)} Q_j = B_x^{-1} B_x \Lambda_x B_x^{-1} Q_j = \left(B_x^{-1} B_x \right) \Lambda_x \left(B_x^{-1} Q_j \right) = E \Lambda_x \tilde{Q}_j =$$

$$= \Lambda_x \tilde{Q}_j = \left(\lambda_1 \tilde{q}_{1,j},\ \lambda_2 \tilde{q}_{2,j},\ \lambda_{N_x-1} \tilde{q}_{N_x-1,j},\ \lambda_{N_x} \tilde{q}_{N_x,j} \right)^T .$$

Тогда последнее матричное уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{h_x^2} \Lambda_x \tilde{Q}_j + \frac{\partial^2 \tilde{Q}_j}{\partial y^2} = \tilde{F}_j . \qquad (2)$$

Из этого уравнения можно выделить отдельное обыкновенное уравнение относительно $\tilde{q}_{i,j}$ при $i = 1..N_x$ и $j = 1..N_y$:

$$\frac{1}{h_x^2} \lambda_i \tilde{q}_{i,j} + \frac{\partial^2 \tilde{q}_{i,j}}{\partial y^2} = \tilde{f}_{i,j} . \qquad (3)$$

На границах $y = 0$ $(j = 0)$ и $y = l$ $(j = N_y + 1)$ наложены условия не протекания: $\frac{\partial q_{p,0}}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial q_{p,N_y+1}}{\partial y} = 0$. Умножив обе стороны этих равенств на $b_{i,p}^{(x)}$, результаты суммируем: $\sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \frac{\partial q_{p,0}}{\partial y} = 0$ и $\sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} \frac{\partial q_{p,N_y+1}}{\partial y} = 0$. Используем свойство коммутативности операций суммирования и дифференцирования: $\frac{\partial}{\partial y} \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} q_{p,0} = 0$ и $\frac{\partial}{\partial y} \sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)} q_{p,N_y+1} = 0$.

Соблюдая общности в обозначениях, получим граничные условия:

$$\frac{\partial \tilde{q}_{p,0}}{\partial y} = 0 \text{ и } \frac{\partial \tilde{q}_{p,N_y+1}}{\partial y} = 0.$$

Теперь аппроксимируем последнее уравнение при $i = 1..N_x$ для внутренних узлов $j = 1..N_y$ [5]:

$$\frac{1}{h_x^2}\lambda_i \tilde{q}_{i,j} + \frac{\tilde{q}_{i,j+1} - 2\tilde{q}_{i,j} + \tilde{q}_{i,j-1}}{h_y^2} = \tilde{f}_{i,j}.$$

Умножим обе стороны уравнения на h_y^2 и соберем подобные члены:

$$\tilde{q}_{i,j+1} - \left(2 - \frac{h_y^2}{h_x^2}\lambda_i\right)\tilde{q}_{i,j} + \tilde{q}_{i,j-1} = h_y^2 \tilde{f}_{i,j}.$$

Введем обозначения

$$a_j = c_j = 1,\ b_j = a_j + c_j - \frac{\lambda_i h_y^2}{h_x^2},\ d_j = h_y^2 \tilde{f}_{i,j}.$$

Диагональное превосходство основной матрицы перехода к конечно-разностным уравнениям не вызывает сомнения, так как $-4 < \lambda_i < 0$ [6].

Тогда КРУ для $j = 1..N_y$ записывается в виде

$$a_j \tilde{q}_{i,j+1} - b_j \tilde{q}_{i,j} + c_j \tilde{q}_{i,j-1} = d_j. \qquad (3)$$

Теперь реализуем граничное условие при $j = 0$. Второй порядок аппроксимации достигается при реализации направленной производной:

$$\frac{-3\tilde{q}_{i,0} + 4\tilde{q}_{i,1} - \tilde{q}_{i,2}}{h_y^2} = 0$$

или

$$-3\tilde{q}_{i,0} + 4\tilde{q}_{i,1} - \tilde{q}_{i,2} = 0.$$

К нему присоединим КРУ (3) при $j = 1$:

$$c_1 \tilde{q}_{i,0} - b_1 \tilde{q}_{i,1} + a_1 \tilde{q}_{i,2} = d_1.$$

Обе стороны первого условия умножим на a_1 и результат почленно суммируем со вторым условием:

$$\left(-3a_1 + c_1\right)\tilde{q}_{i,0} + \left(4a_1 - b_1\right)\tilde{q}_{i,1} = d_1.$$

Отсюда находим

$$\tilde{q}_{i,0} = \frac{4a_1 - b_1}{3a_1 - c_1}\tilde{q}_{i,1} - \frac{d_1}{3a_1 - c_1}.$$

Это означает, что прямую прогонку можно начинать с вычислений

$$\alpha_0 = \frac{4a_1 - b_1}{3a_1 - c_1}, \quad \beta_0 = -\frac{d_1}{3a_1 - c_1}.$$

Принимая

$$\tilde{q}_{i,j-1} = \alpha_{j-1}\tilde{q}_{i,j} + \beta_{j-1},$$

из уравнения (3) получим

$$a_j \tilde{q}_{i,j+1} - \left(b_j - c_j \alpha_{j-1}\right)\tilde{q}_{i,j} = d_j - c_j \beta_{j-1}.$$

Отсюда следует, что для промежуточных значений $j = 1..N_y$ верны формулы

$$\alpha_j = \frac{a_j}{b_j - c_j\alpha_{j-1}}, \quad \beta_j = \frac{c_j\beta_{j-1} - d_j}{b_j - c_j\alpha_{j-1}}.$$

На верхней границе также реализуется направленная производная, что дает

$$3\tilde{q}_{i,N_y+1} - 4\tilde{q}_{i,N_y} + \tilde{q}_{i,N_y-1} = 0.$$

Здесь $\tilde{q}_{i,N_y-1} = \alpha_{N_y-1}\tilde{q}_{i,N_y} + \beta_{N_y-1}$. Поэтому

$$3\tilde{q}_{i,N_y+1} - \left(4 - \alpha_{N_y-1}\right)\tilde{q}_{i,N_y} = -\beta_{N_y-1}.$$

Здесь учитывается $\tilde{q}_{i,N_y} = \alpha_{N_y}\tilde{q}_{i,N_y+1} + \beta_{N_y}$. Тогда получим

$$\left[3 - \alpha_{N_y}\left(4 - \alpha_{N_y-1}\right)\right]\tilde{q}_{i,N_y+1} = \beta_{N_y}\left(4 - \alpha_{N_y-1}\right) - \beta_{N_y-1}.$$

Отсюда находим, что обратная прогонка начинается вычислением

$$\tilde{q}^{n+1}_{i,N_y+1} = \frac{\beta_{N_y}\left(4 - \alpha_{N_y-1}\right) - \beta_{N_y-1}}{3 - \alpha_{N_y}\left(4 - \alpha_{N_y-1}\right)}.$$

Далее производится обратная прогонка для $j = N_y, N_y - 1, ..., 2, 1, 0$ по рекуррентной зависимости

$$\tilde{q}_{i,j} = \alpha_j\tilde{q}_{i,j+1} + \beta_j.$$

Обратный переход к $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, в силу прямого $\tilde{Q}_j = B_x^{-1}Q_j$ и обратного $B_x\tilde{Q}_j = B_xB_x^{-1}Q_j = Q_j$ переходов, для внутренних узлов по *x* производится по формуле

$$q_{i,j} = \sum_{p=1}^{N_x} b^{(x)}_{i,p}\tilde{q}_{p,j}.$$

А на узлах границ $x = 0$ и $x = 1$ функция q имеет нулевое значение.

Далее при $x = 0$ вычислим значения давления в узлах согласно формуле

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Используем центральную разность со вторым порядком точности:

$$\frac{p_{0,j} - p_{0,j-1}}{h_y} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,h_x}\left(-3\zeta_{0,j} + 4\zeta_{1,j} - \zeta_{2,j} - 3\zeta_{0,j-1} + 4\zeta_{1,j-1} - \zeta_{2,j-1}\right).$$

Полагая $p_{0,0} = 0$, для $j = 1..N_y + 1$ находим

$$p_{0,j} = p_{0,j-1} + \frac{h_y}{\mathrm{Re}\,h_x}\left(-3\zeta_{0,j} + 4\zeta_{1,j} - \zeta_{2,j} - 3\zeta_{0,j-1} + 4\zeta_{1,j-1} - \zeta_{2,j-1}\right).$$

Далее для каждого внутреннего слоя по j и $i = 0..N_x$ составим цикл

$$p_{i+1,j} = p_{i,j} + \frac{h_x}{2}\left(q_{i+1,j} + q_{i,j}\right).$$

Для определения значений давления при $j = 0$ пользовались условием $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, которое аппроксимировали центральной разностью

$$\frac{-3p_{i,0} + 4p_{i,1} - p_{i,2}}{2h_y} = 0.$$

Отсюда следует, что при $i = 1, 2, ..., N_x - 1$ можно вычислить

$$p_{i,0} = \frac{4p_{i,1} - p_{i,2}}{3}.$$

Аналогичная формула составляется для $j = N_y + 1$ при $i = 1, 2, ..., N_x - 1$:

$$p_{i,N_y+1} = \frac{4p_{i,N_y} - p_{i,N_y-1}}{3}.$$

При визуализации результатов для трех вершин прямоугольника использовали значения давления в виде

$$p_{N_x+1,0} = \frac{p_{N_x+1,1} + p_{N_x,0}}{2},\ p_{0,N_y+1} = \frac{p_{0,N_y} + p_{1,N_y+1}}{2},\ p_{N_x+1,N_y+1} = \frac{p_{N_x+1,N_y} + p_{N_x,N_y+1}}{2}.$$

Проверкой установлено, что значения $p_{N_x+1,j}$ для $j = 1..N_y + 1$ хорошо согласуются с результатами

$$p_{N_x+1,j} = p_{N_x+1,j-1} + \frac{h_y}{\mathrm{Re}\,h_x}\left(3\zeta_{N_x+1,j} - 4\zeta_{N_x,j} + \zeta_{N_x-1,j} + \right.$$
$$\left. + 3\zeta_{N_x+1,j-1} - 4\zeta_{N_x,j-1} + \zeta_{N_x-1,j-1}\right)$$

для границы $x = 1$.

Обсуждение результатов. Применение метода прямых по продольной координате при решении уравнения относительно давления избавило нас от этапа согласования результатов прямой и обратной прогонок по двум координатам, для чего обычно вводится фиктивное время и используется метод установления. Соответственно, время расчета давления сократилось в несколько раз, и эта кратность зависит от необходимого количества шагов по фиктивному времени. При решении конкретной задачи соответствующие фундаментальная и диагональная матрицы для искомых формируются только один раз. В целом, с учетом устранения фиктивного времени и процесса установления для функции тока и описанного выше способа удается значительно сократить машинное время при решении двухмерных задач гидродинамики.

Ведется работа по материализации представленной модификации метода прямых в виде программного продукта.

Литература:

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. 2-й том /Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 728 с.

2. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.- М.: Наука, 1984. – 288 с.

3. Фаддеева В.Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. – Тр. МИ АН СССР, 1949, том 28. – С. 73-103. (Из Общероссийского математического портала Math-Net).

4. Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.

5. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.

6. Хужаев И.К., Хужаев Ж.И., Равшанов З.Н. Аналитическое решение задачи о собственных значениях и векторах матрицы перехода из параболического уравнения к конечноразностным уравнениям при решении задачи Дирихле // Узбекский журнал информатики и энергетики, 2017, №2. – С. 12-19.

Тошкент давлат ахборот технологиялари университети,
Андижон давлат университети
2018 йил 2 апрелда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Д.Т.Мухамедиева)