О ТОЖДЕСТВАХ АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБР РАЗМЕРНОСТИ

Ш.М.Касимов, И.Зайнабиддинов, О.Самсақов

$\mathfrak{A}_n$ – bu belgilangan F maydon ustida aniqlangan n o'lchamli assotsiativ algebralar sinfi va $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_n)$ – bu $\mathfrak{A}_n$ sinfdan olingan barcha algebralar yordamida yasalgan ko'p xillik bo'lsin, $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}(\mathfrak{A}_n)$ esa sanoqli sondagi erkin yasovchilarga ega bo'lgan erkin assotsiativ algebradagi mos ayniyatlar ideali. Ishda $\mathfrak{M}_1$ va $\mathfrak{M}_2$ ko'p xilliklarni yasovchi algebralar topilgan va $\mathfrak{I}_2$ ayniyatlar ideali tavsiflangan.

***Kalit so'zlar**: F maydon ustida aniqlangan n o'lchamli assotsiativ algebralar sinfi, barcha n o'lchamli algebralar yordamida yasalgan ko'p xillik, sanoqli sondagi erkin yasovchilarga ega bo'lgan erkin assotsiativ algebradagi ayniyatlar ideali.*

Пусть $\mathfrak{A}_n$ – класс ассоциативных алгебр размерности n, над фиксированным полем F, - $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_n)$ – многообразие, порожденные всеми алгебрами из $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}(\mathfrak{A}_n)$ – соответствующий идеал тождеств в свободной ассоциативной алгебре со счетным числом свободных образующих. В работе найдены порождающие алгебры $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ и описан идеал тождеств $\mathfrak{I}_2$.

***Ключевые слова:** класс ассоциативных алгебр размерности n, фиксированное поле F, многообразие порожденной всеми алгебрами размерности n, идеал тождеств в свободной ассоциативной алгебре со счетным числом свободных образующих.*

Let $\mathfrak{A}_n$ – be the class of associative algebras of dimension n over a fixed field F, $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_n)$ the manifold generated by all algebras from $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}(\mathfrak{A}_n)$ – is the corresponding ideal of identities in a free associative algebra with a countable number of free generators. The generating algebras $\mathfrak{M}_1$ and $\mathfrak{M}_2$ are found and the ideal of identities $\mathfrak{I}_2$ is described in the work.

***Key words**: class of associative algebras of dimension n, over a fixed field F, the manifold generated by all algebras of dimension n, the ideal of identities in a free associative algebra with a countable number of free generators.*

Ю.П.Размыслов [2] доказал существование конечного базиса тождеств алгебры матриц второго порядка $\mathrm{M}_2(F)$ над полем F характеристики нуль и указал явный вид образующий идеал тождеств. Ю.Н.Мальцев и Е.Н.Кузьмин [3] показали базис тождеств алгебры матриц второго порядка $\mathrm{M}_2(F)$ над конечным полем F. С.А.Пихтельков рассматривал класс ассоциативных алгебр малых размерностей с единичным элементом [4].

Мы изучаем класс произвольных ассоциативных алгебр малых размерностей.

В работе найдены порождающие алгебры $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ и описан идеал тождеств $\mathfrak{I}_2$.

Далее будем считать, что F - поле характеристики нуль. Как известно, в этом случае любое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств из $\mathfrak{I}_n$. Возможный подход к решению поставленной задачи состоит в следующем. Сначала находится набор некоторых «конкретных» алгебр, порождающих многообразия $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, затем разыскиваются тождества, которым удовлетворяют эти алгебры.

Предложение. *$\mathfrak{M}_1$ порождается алгеброй $Fe(e^2=e)$ и совпадает с многообразием ассоциативно-коммутативных алгебр.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_1$ – класс ассоциативных алгебр размерности 1, над фиксированным полем *F*, $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_1)$ – многообразие, порожденное всеми алгебрами из $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}(\mathfrak{A}_1)$ – соответствующий идеал тождеств в свободной ассоциативной алгебре со счетным числом свободных образующих. Тогда любая алгебра $\mathcal{A}$ из $\mathfrak{A}_1$ имеет таблицу умножения $u^2 = \propto u$. Если $\propto = 0$, получим алгебру с таблицы умножением $u^2 = 0$. Следовательно, эта алгебра нильпотентна. Если $\propto \neq 0$, то, полагая, что $\propto u = e$, получим $e^2 = e$. В последнем случае алгебра $\mathcal{A} = Fe$ изоморфна F. Ясно, что в любом случае алгебра $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_1$, коммутативна, $[x, y] \in \mathfrak{I}_1$. Покажем, что $\mathfrak{I}_1$-порождается тождеством [*x, y*]. Действительно, любое нетривиальное тождество в классе ассоциативно-коммутативных алгебр имеет вид $x_1 x_2 \cdots x_n = 0, (n \geq 1)$. Но алгебра F не нильпотентна, следовательно, $x_1 x_2 \cdots x_n \notin \mathfrak{I}_1$.

Ясно, что имеют место включения $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{M}_n \subseteq \cdots$, и они не стабилизируются ни на конечном шаге, что следует, например, из того, что M_n (алгебра матриц порядка n.) не удовлетворяет никакому тождеству степени $m < 2n$. [2] = Возникает вопрос: будет ли цепочка строго возрастающей?

Предложение. *Алгебры размерности 2 либо коммутативны, либо изоморфны одной из следующих двух алгебр матриц вида* $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, *где* $a, b \in F$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}_2$ -класс ассоциативных алгебр размерности 2, над фиксированным полем F, $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$ – многообразие, порожденное всеми алгебрами из $\mathfrak{A}_2$. $\mathcal{A}$ любая алгебра из $\mathfrak{A}_2$, $\mathcal{N}$-радикал алгебры $\mathcal{A}$. Доказательство введем по размерности радикала алгебры $\mathcal{A}$.

Пусть $dim\mathcal{N} = 2$. В этом случае $\mathcal{A} = \mathcal{N}$, следовательно, алгебра $\mathcal{A}$ нильпотентна. Откуда получаем, что $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}^2 \supset 0$. Тогда может случится, что $\mathcal{A}^2 = 0$ либо $\mathcal{A}^2 = (f)$ и алгебра $\mathcal{A} = (e, f)$ имеет таблицу умножения

$$ef = fe = f^2 = 0, e^2 = \propto f.$$

Таким образом, нильпотентные алгебры из $\mathfrak{A}_2$ коммутативны

Пусть $dim\mathcal{N} = 1$. Тогда $\mathcal{A} / \mathcal{N}$ - полупростая одномерная алгебра и $\mathcal{A} / \mathcal{N} \cong F$. По теореме Веддербарна имеем $\mathcal{A} = Fe + \mathcal{N}$, где $e^2 = e$. Если $\mathcal{N} = (u)$ то $u^2 = 0$. Если $\mathcal{A} = (e, f)$, то имеем следующую таблицу умножения $e^2 = e, u^2 = 0, eu = \propto u, ue = \beta u$. Так как $e(eu) = e^2 u = eu$, то $\propto^2 = \propto$ и аналогичного $\beta^2 = \beta$. Отсюда $\propto = 0,1; \beta = 0,1$. Если $\alpha = \beta$, то $\mathcal{A}$ коммутативна. Остаются две алгебры $\mathcal{A}(\alpha, \beta)$, отвечающие значениям $\propto = 0$, $\beta = 1$ и $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Эти алгебры можно реализовать, например, как алгебры матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, где $a, b \in F$.

Пусть, наконец, $dim\mathcal{N} = 0$. Тогда $\mathcal{A}$ - полупростая алгебра, следовательно, она является прямой суммой простых алгебр. А каждая простая алгебра имеет размерность m^2 над своим центром. Так как размерность $\mathcal{A}$ равна двум, имеем $\mathcal{A} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$, где $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2$-центр прямых слагаемых. Итак, алгебра $\mathcal{A}$ - коммутативна.

Теперь рассмотрим вопрос о тождествах многообразия $\mathfrak{M}_2$. Прежде всего заметим, что $\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}(\mathbb{A}_2) \bigcap \mathfrak{I}(\mathbb{B}_2)$. Легко увидеть, что $\mathfrak{I}(\mathbb{A}_2)$ порождается тождеством $[x_1, x_2]\, x_3$, а $\mathfrak{I}(\mathbb{B}_2)$ порождается тождеством $x_1[x_2, x_3]$. Обозначим через $\mathbb{P}_n$ стандартное тождество степени n:

$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}) = \sum \pm x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$, где суммирование распространяется на все перестановки $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ чисел $1, 2, \cdots, n$, а знак «+» или «–» – выбирается в зависимости от того, четна перестановка $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ или нет. Хорошо известно, что любая алгебра размерности n удовлетворяет тождеству $\mathbb{P}_{n+1}$. В частности $\mathbb{P}_3 \in \mathfrak{I}_2$. Кроме того, обе алгебры $\mathbb{A}_2$ и $\mathbb{B}_2$ удовлетворяют тождествам

$f_1 = x_1[x_2, x_3]x_4$ и $f_2 = [x_1, x_2][x_3, x_4]$.

Теорема. $\mathfrak{I}_2$ *– порождается тождествами*

$\mathbb{P}_3, f_1 = x_1[x_2, x_3]x_4$ и $f_2 = [x_1, x_2][x_3, x_4]$.

Доказательство. Пусть полилинейное тождество из $\mathfrak{I}_2$, $degf = n \geq 3$. Так как f – является следствием коммутативности, то его можно представить в виде линейной комбинации членов вида

$[x_i, x_j]x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-2}}$, $x_{i_1}\cdots[x_i, x_j]\cdots x_{i_{n-2}}$, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-2}}[x_i, x_j]$. Члены второго типа (при $n \geq 4$) являются следствием $f_1 = x_1[x_2, x_3]x_4$ и поэтому могут быть опущены. Из тождества $f_2 = [x_1, x_2][x_3, x_4]$ следует, что члены первого и третьего типов не зависят от перестановки $(i_1, i_2, \cdots i_n)$.

Пусть

$$f = \sum_{i<j} \propto_{ij} [x_i, x_j]x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-2}} + \sum_{i<j} \beta_{ij} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-2}}[x_i, x_j].$$

Обозначим через

$$f' = \sum_{i<j} \propto_{ij} [x_i, x_j]x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-2}};\ f'' = \sum_{i<j} \beta_{ij} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-2}}[x_i, x_j]$$

Так как f, $f'' \in \mathfrak{I}(\mathbb{B}_2)$ то $f' \in \mathfrak{I}(\mathbb{B}_2)$. С другой стороны $f' \in \mathfrak{I}(\mathbb{A}_2)$. Таким образом, $f', f'' \in \mathfrak{I}_2$. Покажем, что f' и f'' являются следствиями $\mathbb{P}_3$ и f_2. Пусть наименьший индекс, для которого $\propto_{ij} \neq 0$. Положим $x_i = e_{12}$, а остальные переменные приравниваем e_{22}. Тогда $(\sum_j \propto_{ij})e_{12} = 0$, откуда $\sum_j \propto_{ij} = 0$, следовательно,члены f' с минимальным индексом *i* можно представить как линейную комбинацию выражений вида

$$([x_i, x_j]x_k - [x_i, x_k]x_j)x_{i_1}\cdots x_{i_{n-3}} (i < j < k) \qquad (1).$$

Далее из $\mathbb{P}_3$ следует, что $[x_i, x_j]x_k + [x_k x_i]x_j + [x_j x_k]x_i = 0$. Откуда, (1) можно заменить на $-[x_j, x_k]x_{i_1}\cdots x_{i_{n-3}}$, где $j, k > i$. Итак, перерабатывая f' с помощью тождеств $\mathbb{P}_3$, f_2 мы в конечное число шагов уничтожим все члены f. Аналогично, f'' является следствием $\mathbb{P}_3$ и f_2.

Литература:

1. Днестровская тетрадь. Издание второе.- Новосибирск, 1976.
2. Размыслов Ю.П. О конечном базисе тождеств матричной алгебры. // Алгебра и логика.- 1973.- Т.12, №1.- С.83-113
3. Мальцев Ю.Н., Кузьмин Е.Н. Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем.// Алгебра и логика.- 1978.- Т.17, №1.- С.28-32
4. Пихтельков С.А. Кандидатская диссертация.- М., 1981.

Андижон давлат университети,
2017 йил 4 сентябрда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)