АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ

В.Г.Миладжонов, Р.В.Муллажонов, К.Х.Тургунова, Ж.Муллажонова

Ушбу ишда баъзи чизиқсиз йирик масштабли системалар турғунлигининг етарли шартлари ҳосил қилинган.

This article is devoted to the formation of sufficient conditions of stability of some lineless large scale systems.

Вначале представим способ анализа устойчивости некоторых стационарных нелинейных КМС, используя при этом квадратичную функцию Ляпунова, построенную для промежуточной линейной системы. Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть скалярная функция $\varphi(x): R^n \to R$ строго положительная. Состояние равновесия $x = 0$ систем

$$\dot{x} = Ax \quad 1) \quad \text{и} \quad \dot{x} = A\varphi(x)x, \quad (2)$$

где $x \in R^n$, А – $n \times n$ постоянная матрица, одновременно будет устойчивым (асимптотически устойчивым) или неустойчивым соответственно.

Далее рассмотрим нелинейные системы уравнений возмущенного движения

$$\dot{x} = f(x), \ (3)$$

где

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in R^n, \ f(x): R^n \to R^n, \ f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^T, \ f(0) = 0.$$

Предположим, что $f_j(x) = \sum_{l=1}^{n} f_{jl}(x)x_l$, $j = \overline{1,n}$. При этом систему (3) можно представить в следующим виде

$$\dot{x} = A(x)x, \ (4)$$

где

$$A(x) = \left(f_{jl}(x)\right), \ j,l = \overline{1,n}.$$

Для функции $f_{jl}(x)$, $j,l = \overline{1,n}$ существуют линейно независимые строго положительные скалярные функции

$$\varphi_0(x) = c, \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_m(x),$$

с порядком строгости $\varepsilon_i > 0, \ i = \overline{1,m}$, соответственно, такие, что

$$f_{jl}(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{jl}^{i} \varphi_i(x), \ j,l = \overline{1,n},$$

где α_{jl}^{i} -некоторые постоянные.

Учитывая это, систему (3) представим в виде

$$\dot{x} = \left(\sum_{i=0}^{m} A_i \varphi_i(x) \right) x, \ (5)$$

где

$$A_i = \left(\alpha_{jl}^{i}\right), \ j,l = \overline{1,n}, \ i = \overline{1,m}.$$

Для исследования устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (5) вместе с этой системой рассмотрим следующие системы

$$\dot{x} = A_i x,\ i = 1,2,3,...,m. \quad (6)$$

Теорема 2 Пусть в системах (5) и (6) матрицы A_i и функции $\varphi_i(x)$ удовлетворяют условиям:

а) матрицы $A_i \in R^{n\times n},\ i = 1,2,...,m$ невырожденные, симметрические относительно главной диагонали и для каждого $1 \le i \le m$ A_i и $-A_i$ не имеют общих собственных значений;

б) $\varphi_i(x)$ - строго положительные скалярные функции с порядком строгости $\varepsilon_i > 0,\ i = 1,2,...,m$, соответственно;

Тогда из устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости состояния равновесия $x = 0$ всех систем (6) следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) или неустойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (5) соответственно.

Следствие 1. Если состояние равновесия $x = 0$ хотя бы одной системы из совокупности систем (6) асимптотически устойчиво, и состояние равновесия $x = 0$ остальных систем также устойчиво, то состояние равновесия системы (5) асимптотически устойчиво.

Следствие 2. Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (5)

а) устойчиво, если $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \lambda_M(G_i) \le 0;$

б) асимптотически устойчиво, если $\sum_{i=0}^{m} \varepsilon_i \lambda_M(G_i) < 0;$

в) неустойчиво, если $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \lambda_m(G_i) > 0.$

Теорема 3. Пусть система (4) представлена в виде (5) и для этой системы построена функция Ляпунова вида $v(x) = x^T P x,$ скалярные функции $\varphi_i(x),\ i = 0,1,...,m$ линейно независимые и строго положительные порядка строгости $\varepsilon_i,\ i = 1,2,...,m$ соответственно. Если:

1) хотя бы для одной матрицы A_i матрица $G_i = A_i^T P + P A_i,\ 0 \le i \le m,$

отрицательно определенная, а для остальных матриц $A_j,\ i \ne j$ матрицы $G_i = A_j^T P + P A_j$ отрицательно полуопределенные или тождественно равные нулю, то состояние равновесия $x = 0$ систем (5) и (4) асимптотически устойчиво;

2) для всех матриц A_i матрицы $G_i = A_i^T P + P A_i, i = 0,1,2,...,m$

отрицательно определенные, а для остальных матриц $A_j,\ i \ne j,\ 0 \le j \le m$ матрицы $G_j = A_j^T P + P A_j$ положительно полуопределенные или тождественно равные нулю, то состояние равновесия системы (5) и (4) неустойчиво.

Доказательство теоремы 3 следует из следствия 2.

Следствие 3. Пусть для системы (5) построена функция Ляпунова вида $v(x) = x^T E x$ и линейно независимые скалярные функции $\varphi_i(x)$ строго положительные с порядком строгости $\varepsilon_i > 0, i = 1,2,...,m$, соответственно. Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (5)

а) устойчиво, если все матрицы A_i отрицательно полуопределенные;

б) асимптотически устойчиво, если хотя бы одна матрица $A_i\ (0 \le i \le m)$ отрицательно определенная и остальные матрицы $A_j,\ i = j,\ 0 \le j \le m$ отрицательно полуопределенные;

в) неустойчиво, если хотя бы одна матрица $A_i\ (0 \le i \le m)$, положительно определенная и остальные матрицы $A_j,\ i \ne j,\ 0 \le j \le m$ положительно полуопределенные.

Сначала рассмотрим следующий частный случай. Пусть системы (5) и (6) имеют вид

$$\dot{x} = \left(A_1\varphi_1(x) + A_2\varphi_2(x)\right)x, \quad (7)$$

$$\dot{x} = A_1 x, \quad (8)$$

$$\dot{x} = A_2 x, \quad (9)$$

где $x \in R^n$, A_1, A_2 -постоянные матрицы n-го порядка, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ - строго положительные функции с порядком строгости ε_1, ε_2 соответственно.

Для систем (7), (8), (9) построим функции Ляпунова вида $v(x) = x^T Px$, Для полной производной от функции $v(x) = x^T Px$, в силу систем (8), (9) имеем

$$\left(\dot{v}(x)\right) = x^T (A_1^T P + PA_1)x = x^T G_1 x \le \lambda_M (G_1)\|x\|^2,$$
$$\left(\dot{v}(x)\right) = x^T (A_2^T P + PA_2)x = x^T G_2 x \le \lambda_M (G_2)\|x\|^2.$$

Предположим, что $\lambda_M (G_1) < 0,\ \lambda_M (G_2) > 0.$ Тогда для полной производной от функции $v(x) = x^T Px,$ в силу (7) имеем

$$\left(\dot{v}(x)\right) = \varphi_1(x)x^T (A_1^T P + PA_1)x + \varphi_2(x)x^T (A_2^T P + PA_2)x =$$
$$= \varphi_1(x)x^T G_1 x + \varphi_2(x)x^T G_2 x = \varphi_2(x)\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} x^T G_1 x + x^T G_2 x\right) \le$$
$$\le \varphi_2(x)\left(\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \lambda_M (G_1) + \lambda_M (G_2)\right)\|x\|^2.$$

Из-за положительной определенности функции $\varphi_2(x)$ знак $\left(\dot{v}(x)\right)_{(3.2.24)}$ зависит только от знака $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \lambda_M (G_1) + \lambda_M (G_2)$. Пусть ε -порядок строгости строго положительной функции $\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$, т.е. $\min \varphi(x) = \varepsilon$. Тогда для $\left(\dot{v}(x)\right)$ получим оценку

$$\left(\dot{v}(x)\right) \le \left(\varepsilon\lambda_M (G_1) + \lambda_M (G_2)\right)\varphi_2(x)\|x\|^2. \quad (10)$$

Отсюда получим достаточное условие устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (7).

Состояние равновесия $x = 0$ системы (7)

а) устойчиво, если $\lambda_M (G_2) = -\varepsilon\lambda_M (G_1)$;

б) асимптотически устойчиво, если $\lambda_M (G_2) < -\varepsilon\lambda_M (G_1)$.

Теперь рассмотрим общий случай.

Пусть для систем (5) и (6) построена функция Ляпунова $v(x) = x^T Px,$ и при $i = 0,1,2,...,k$ $\lambda_M (G_i) < 0$, а при $i = k+1, k+2,...,m\ \ \lambda_M (G_i) > 0,\ k < m.$

Для определения знака функции $\left(\dot{v}(x)\right)$ применим следующий алгоритм:

1-этап. Рассмотрим неравенство

$$\left(\dot{v}(x)\right) \le \left(\sum_{i=0}^{m} \varphi_i(x)\lambda_M (G_i)\right)\|x\|^2, \quad (11)$$

где $G_i = A_i^T P + PA_i,\ \ i = 0,1,2,...,m,\ \min \varphi_i(x) = \varepsilon_i.$

По условию при $i = 0,1,2,...,k$, $\lambda_M (G_i) < 0$, а при $i = k+1, k+2,...,n\ \ \lambda_M (G_i) > 0.$ Определим знак выражения

$$\varphi_{i_1}(x)\lambda_M (G_{i_1}) + \varphi_{i_2}(x)\lambda_M (G_{i_2}), \quad (12)$$

где $0 \le i_1 \le k,\ \ k+1 \le i_2 \le m.$

$$\varphi_{i_1}(x)\lambda_M (G_{i_1}) + \varphi_{i_2}(x)\lambda_M (G_{i_2}) = \varphi_{i_2}(x)\left(\frac{\varphi_{i_1}(x)}{\varphi_{i_2}(x)} \lambda_M (G_{i_1}) + \lambda_M (G_{i_2})\right) \le$$
$$\le \varphi_{i_2}(x)\left(\varepsilon_{i_1,i_2}\lambda_M (G_{i_1}) + \lambda_M (G_{i_2})\right) = \varphi_{i_2}(x)\delta_{i_1,i_2},$$

где ε_{i_1,i_2} -порядок строгости функции $\dfrac{\varphi_{i_1}(x)}{\varphi_{i_2}(x)}$.

Если

$$k=\frac{m-1}{2},\ \text{то}\quad \left(\dot{v}(x)\right)\le \sum_{\substack{0\le i_1\le k\\ k+1\le i_2\le m}}\varphi_{i_2}(x)\delta_{i_1,i_2},\quad (13)$$

$$k<\frac{m-1}{2},\ \text{то}\ \left(\dot{v}(x)\right)\le \sum_{\substack{0\le i_1\le k\\ k+1\le i_2\le 2k+1}}\varphi_{i_2}(x)\delta_{i_1,i_2}+\sum_{i=2k+2}^{m}\varphi_i(x)\lambda_M(G_i),\ (14)$$

$$k>\frac{m-1}{2},\ \text{то}\ \left(\dot{v}(x)\right)\le \sum_{i=0}^{m-k-1}\varphi_i(x)\lambda_M(G_i)+\sum_{\substack{m-k\le i_1\le k\\ k+1\le i_2\le m}}\varphi_{i_2}(x)\delta_{i_1,i_2},\ (15)$$

где $\delta_{i_1,i_2}=\varepsilon_{i_1,i_2}\lambda_M(G_{i_1})+\lambda_M(G_{i_2}).$

Если в правой части неравенств (13), (14), (15) все слагаемые имеют одинаковы знак, то мы можем определить знак функции $\left(\dot{v}(x)\right)$, и процесс будет остановлен.

Если в первой части неравенств (13), (14), (15) слагаемые имеют различные знаки, то переходим ко второму этапу. Во втором этапе повторяем все сделанное в первом этапе. Несколько раз повторяя этот процесс определим знак функции $\left(\dot{v}(x)\right)$. Если этот знак отрицателен, то задача устойчивости будет решена. Если этот знак положителен, то переходим к рассмотрению неравенства

$$\left(\dot{v}(x)\right)\ge\left(\sum_{i=0}^{m}\varphi_i(x)\lambda_M(G_i)\right)\|x\|^2,\quad (16)$$

и для правой части этого неравенства применяем вышеприведенный процесс.

Теперь изложим способ анализа устойчивости некоторых нестационарных нелинейных крупномасштабных систем, используя при этом квадратичную функцию Ляпунова, построенную для промежуточной линейной системы.

Рассмотрим нестационарные нелинейные системы уравнений возмущенного движения

$$\dot{x}=f(t,x),\ \ x=x(t),\ (17)$$

где

$$t\in R^+,\ x=(x_1,x_2,...,x_n)^T\in R^n,\ f(t,x):R\times R^n\to R^n,$$
$$f(t,x)=\left(f_1(t,x),f_2(t,x),...,f_n(t,x)\right)^T,\quad f(t,0)=0.$$

Предположим, что $f_i(t,x)=\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(t,x)x_j,\ \ (i,j=1,2,...,n.)$

При этом систему (17) можно представить в следующем виде

$$\dot{x}=A(t,x)x,\ (18)$$

где $A(t,x)=\left(f_{ij}(t,x)\right),\ (i,j=1,2,...,n.)$

Как известно, для функций $f_{ij}(t,x),\ (i,j=1,2,...,n)$ существуют линейно независимые строго положительные скалярные функции

$$\varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x),...,\varphi_m(x),$$

с порядком строгости $\varepsilon_l>0,\ l=0,1,...,m,\ \varepsilon_0=c>0,$ соответственно, такие, что

$$f_{ij}(t,x)=\sum_{l=0}^{m}\alpha_{ij}^{l}(t)\varphi_l(x),\quad (i,j=1,2,...,n,)$$

где $\alpha_{ij}^{l}(t):R\to R.$

Учитывая это, систему (18) представим в виде

$$\dot{x} = \left(\sum_{l=0}^{m} A_l(t)\varphi_l(x) \right) x \quad (19)$$

где $A_l(t) = \left(a_{ij}^l(t)\right),\ i,j = 1,2,..,n,\ \ l = 0,1,...,m.$

Каждую матрицу $A_l(t)$ представим в следующим виде [2]

$$A_l(t) = A_{l0} + A_{l1}\psi_1(t) + ... + A_{ls}\psi_s(t),\ \ l = \overline{1,m}\ , \quad (20)$$

где A_{lk}, $(l = 0,1,2,...,m,\ \ k = 0,1,...,s)$ - постоянные матрицы, $\psi_0(t) = 1,\ \psi_k(t) > 0 \quad k = 1,2,...,s$ при всех $t \in R^+$. Тогда система (19) примет вид:

$$\dot{x} = \left(A_{00} + \sum_{k=1}^{s} A_{0k}\psi_k(t) + \sum_{l=1}^{m} A_{0l}\varphi_l(x) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{s} A_{l,k}\psi_k(t)\varphi_l(x) \right) x\ . \quad (21)$$

Для исследования устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (21) вместе с этой системой рассмотрим следующие линейные системы

$$\dot{x}_i = A_{l,k}x, \quad (l = 1,2,...,m,\ \ k = 1,2,...,s)\ . \quad (22)$$

Теорема 4. Пусть в системах (21) и (22) матрицы $A_{l,k}$, $(l = 0,1,2,...,m,\ \ k = 0,1,2,...,s)$ и функции $\psi_k(t),\ (k = 0,1,2,...,s,)$, $\varphi_l(x),\ (l = 0,1,2,...,m)$ удовлетворяют условиям:

а) матрицы $A_{lk} \in R^{n\times n},\ (l = 0,1,2....,m,\ \ k = 0,1,2,...,s)$ невырожденные, симметрические относительно главной диагонали и для каждого $0 \le l \le m, 0 \le k \le s,\quad A_{lk}$ и $-A_{lk}$ не имеют общих собственных значений;

б) $\varphi_l(x)$ и $\psi_k(t)$ - строго положительные функции с порядком строгости $\varepsilon_l > 0,\ \ (l = 0,1,2,...,m)$ и $\mu_k > 0,\ \ (k = 0,1,2,...,s)$ соответственно.

Тогда из устойчивости (асимптотической устойчивости) или неустойчивости состояния равновесия $x = 0$ всех систем (22) следует устойчивость (асимптотической устойчивость) или неустойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (21) соответственно.

Следствие 4. Если состояние равновесия $x = 0$ хотя бы одной системы из совокупности систем (22) асимптотически устойчиво и состояние равновесия $x = 0$ остальных систем устойчиво, то состояние равновесия $x = 0$ системы (21) асимптотически устойчиво.

Следствия 5. Пусть выполняются все условия теоремы 4. Тогда состояние равновесия системы (21):

а) устойчиво, если

$$\lambda_M(G_{00}) + \sum_{k=1}^{s}\mu_k\lambda_M(G_{0k}) + \sum_{l=1}^{m}\varepsilon_l\lambda_M(G_{l0}) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{s}\varepsilon_l\mu_k\lambda_M(G_{lk}) \le 0,$$

б) асимптотически устойчиво, если

$$\lambda_M(G_{00}) + \sum_{k=1}^{s}\mu_k\lambda_M(G_{0k}) + \sum_{l=1}^{m}\varepsilon_l\lambda_M(G_{l0}) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{s}\varepsilon_l\mu_k\lambda_M(G_{lk}) < 0,$$

с) неустойчиво, если

$$\lambda_M(G_{00}) + \sum_{k=1}^{s}\mu_k\lambda_M(G_{0k}) + \sum_{l=1}^{m}\varepsilon_l\lambda_M(G_{l0}) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{s}\varepsilon_l\mu_k\lambda_M(G_{lk}) > 0\ .$$

Теорема 5. Пусть система (17) представлена в виде (21) и для этой системы построена скалярная функция Ляпунова вида $v(x) = x^T Px,$ скалярные функции $\varphi_l(x),\ (l = 0,1,...,m),\ \psi_k(t),\ (k = 0,1,2...,s)$ линейно независимы и строго положительны с порядком строгости $\varepsilon_l, (l = 0,1,2,...,m),\ \mu_k,\ (k = 0,1,2,...,s)$, соответственно. Если:

1) хотя бы для одной матрицы A_{ij}, $(0 \le i \le m,\ 0 \le j \le s)$, матрица $G_{ij} = A_{ij}^T P + PA_{ij}$ отрицательно определенная и для остальных матриц A_{lk}, $l \ne i$ или $k \ne j$ матрицы $G_{lk} = A_{lk}^T P + PA_{lk}$ отрицательно полуопределенные или тождественно равные нулю, то состояние равновесия системы (21) и (17) асимптотически устойчиво;

2) для всех матриц A_{lk} матрицы $G_{lk} = A_{lk}^T P + PA_{lk}$, ($l = 0,1,...,m,\ k = 0,1,2...,s$) отрицательно полуопределенно, то состояние равновесия $x = 0$ системы (21) и (17) устойчиво;

3) хотя бы для одной матрицы A_{ij},$(0 \le i \le m,\ 0 \le j \le s)$, матрица $G_{ij} = A_{ij}^T P + PA_{ij}$ положительно определенная, для остальных матриц A_{lk}, $l \ne i$ или $k = j$ $0 \le l \le m,\ 0 \le k \le s$ матрицы $G_{lk} = A_{lk}^T P + PA_{lk}$ положительно полуопределенные или тождественно равные нулю, то состояние равновесия $x = 0$ системы (21) и (17) неустойчиво.

Доказательство теоремы 5 следует из следствия 5.

Следствие 6. Пусть для системы (21) построена функция Ляпунова в виде $v(x) = x^T Ex$ и скалярные функции $\varphi_l(x),\ (l = 0,1,...,m),\ \psi_k(t),\ (k = 0,1,2...,s)$ строго положительные с порядком строгости $\varepsilon_l,\ (l = 0,1,2,...,m),\ \mu_k,(k = 0,1,2,...,s)$ соответственно. Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (21)

а) устойчиво, если все матрицы A_{lk}, $(l = 0,1,2,...,m,\ k = 0,1,2,...,s)$ отрицательно полуопределенные;

б) асимптотически устойчиво, если хотя бы одна матрица A_{ij}, $(0 \le i \le m,\ 0 \le j \le s)$, отрицательно определенная и остальные матрицы A_{lk}, $(l \ne i,\ k \ne j,\ l = 0,1,2,...,m,\ k = 0,1,2,...,s)$ отрицательно полуопределенные или тождественно равные нулю;

в) неустойчиво, если хотя бы одна матрица A_{ij}, $0 \le i \le m,\ 0 \le j \le s,$ положительно определенная и остальные матрицы $A_{lk}, l \ne i, k \ne j,\ l = 0,1,2,...,m,\ k = 0,1,2,...,s$ положительно полуопределенные или тождественно равные нулю.

Пример1. Рассмотрим систему четвертого порядка, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (2 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2\|x\|)x_1 + (x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1)x_2 + x_3 + (3e^{x^2} - 2)x_4,\\
\dot{x}_2 &= (x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1)x_1 + (2 - 9e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2\|x\|)x_2 + (3e^{x^2} - 2)x_3 + x_4,\\
\dot{x}_3 &= x_1 + (3e^{x^2} - 2)x_2 + (1 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2\|x\|)x_3 + (3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2\|x\| - 1)x_4,\\
\dot{x}_4 &= (3e^{x^2} - 2)x_1 + x_2 + (3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2\|x\| - 1)x_3 + (1 - 6e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2\|x\|)x_4,
\end{aligned} \quad (23)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$.

В системе (23) выполняются условия $f_i(x) = \sum_{j=1}^{4} f_{ij}(x)x_j,\ \ i = 1,2,3,4,$ поэтому ее можно представить в виде (4), т.е.

$$\dot{x} = A(x)x, \quad (24)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$,

$$A = \begin{pmatrix}
2 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2\|x\| & x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1 & 1 & 3e^{x^2} - 2\\
x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1 & 2 - 9e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2\|x\| & 3e^{x^2} - 2 & 1\\
1 & 3e^{x^2} - 2 & 1 - 6e^{x^2} - x^2 - 2\sin^2\|x\| & 3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2\|x\| - 1\\
3e^{x^2} - 2 & 1 & 3e^{x^2} + x^2 + 2\sin^2\|x\| - 1 & 1 - 6e^{x^2} - 2x^2 - 4\sin^2\|x\|
\end{pmatrix}.$$

Обозначим, $\varphi_1(x) = 3e^{x^2} - 2$ и $\varphi_2(x) = x^2 + 2\sin^2\|x\| + 1$. Нетрудно проверить, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ строго положительные. Тогда система (24) представляется в следующем виде

$$\dot{x} = A_0 x + \varphi_1(x) A_1 x + \varphi_2(x) A_2 x, \quad (25)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Для исследования устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (19) вместе с этой системой рассмотрим следующие системы

$$\dot{x} = A_0 x, \quad (26)$$

$$\dot{x} = A_1 x, \quad (27)$$

$$\dot{x} = A_2 x. \quad (28)$$

Характеристические уравнения матриц A_0 и A_2 имеют вид

$$(\lambda^2 + 3\lambda + 1)^2 = 0$$

и

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1{,}5 + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}382 < 0\,,\ \lambda_3 = \lambda_4 = -1{,}5 - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -2{,}618 < 0\,,$$

а характеристическое уравнение матрицы A_1 имеет вид

$$\lambda^4 + 9\lambda^3 + 27\lambda^2 + 30\lambda + 9 = 0$$

и

$$\lambda_1 = -3 < 0,\ \lambda_2 \approx -3{,}532 < 0\,, \lambda_3 \approx -1{,}647 < 0\,, \lambda_4 \approx -0{,}468 < 0\,.$$

Итак, состояние равновесия систем (26), (27), (28) асимптотически устойчиво, поэтому на основе теоремы 2 состояние равновесия $x = 0$ системы (25), а также (23) асимптотически устойчиво.

Литература:

1. Миладжанов В.Г., Муллажонов Р.В. Об одном методе анализа устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Узбекский журнал Проблемы механики. − Ташкент, 2009. − № 2-3. −С. 28-30.

2. Муллажонов Р.В., Каримжонов А. Анализ устойчивости нестационарные линейных КМС. Труды международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль Хорезми 2009». − Ташкент, 2009. −том №1. −С.251−255.

3. Муллажонов Р.В. Обобщенное транспонирование матриц и структуры линейных крупномасштабных систем // Украинский журнал «Доп.НАН Украини».− Киев, 2009. - №11.С. 27 −35.

4. Муллажонов Р.В. Анализ устойчивости линейных крупномасштабных систем. // Проблема механики. − Ташкент, 2010. −№2.−С. 4− 7.

Андижон давлат университети,
2012 йил 4 сентябрда қабул қилинган