ОТ МЕХАНИКИ Й.НАМБУ К АЛГЕБРАМ В.Т.ФИЛИППОВА

Ш.М.Касимов

Мақолада В.Т. Филиппов алгебралари ўрганилган ва Амицур-Куроша назарда тутган радикал бўлмасдан туриб $(n-1)$ *-даражада осон ҳал бўладиган энг катта идеал мавжудлиги кўрсатилган.*

Калит сўзлар: *n-ли алгебралар (В.Т.Филиппов алгебралари), k-даражада осон ҳал бўладиган идеаллар.*

В статье исследуются некоторые свойства (n-1)-разрешимых n-лиевых алгебр Филиппова, доказывается существование наиболее (n-1)-разрешимого идеала, не являющегося радикалом согласно Амицуру–Курошу.

Ключевые слова*: n-лиевые алгебры, k-разрешимый идеал, k-радикал В.Т.Филиппова в n-лиевых алгебрах.*

The article studies the Filippov's aljebras in which the author tries to prove existence of a maximal $(n-1)$ *-solvable ideal, that is not a radical in the sense of Amitsur-Kurosh.*

Key words: *Filippov's aljebra, k-solvable ideal.*

Теория алгебр Ли [1] является одной из самых динамично развивающихся направлений современной алгебры. Актуальность исследования такого объекта, как алгебры Ли обусловлена тем, что многие модели статистической и квантовой механики, молекулярной физики и др. описываются данными алгебрами. Активные исследования свойств алгебр Ли привели к исследованию нового, более общего объекта - *n*-лиевые алгебры, которые впоследствии были названы алгебрами Филиппова. Источником их возникновения стала механика Намбу, предложенная Й.Намбу [2], и работа Оливера[3], как обобщение Гамильтоновой механики.

В.Т.Филипповым введено понятие (n-1)-лиевой алгебры, являющееся естественным обобщением понятия алгебры Ли [4-5] на случай, когда основная операция умножения n-арна*n* ≥ 2 (при *n* =2 оно совпадает с обычным определением алгебры Ли). Теория таких алгебр, как расширение теории алгебр Ли, представляет широкий простор для исследования. В работах [6-7] была развита структурная теория n-лиевых алгебр. В частности, автором [6] было введено понятие к- разрешимости идеалов в *n*-лиевых алгебрах (2≤ *k*≤ *n*). Это понятие при *k* = *n* было предложено В.Т.Филипповым[4-5] и при *k* = *n* Е.Н.Кузьминым(устное сообщение).

(n-1)-разрешимый радикал В.Т.Филиппова

Учитывая вышеуказанное, начнём со следующего определения:

Определение. Линейное пространство A над полем F называется n-лиевой алгеброй, если на нем определена n-арная полилинейная операция $[\cdots]$, кососимметрическая по всем аргументам и удовлетворяющая тождеству, аналогичному Якоби в алгебре Ли:

$$\left[[x_1,\ x_2,...,\ x_n], y_2,...,y_n\right] = \sum_i^n = 1\left[x_1,...,\left[x_i, y_2,...,\ y_n\right],\ ...,\ x_n\right] \quad (1)$$

операция $[\cdots]$ называется умножением, а операторы

$$R(y_2,...,\ y_n) : x \mapsto [x,\ y_2,...,\ y_n]$$

-операторами правого умножения.

Можно заметить, что тождество (1) означает операторы правого умножения, как в случае алгебры Ли, являются дифференцированиями алгебры A (в дальнейшем, когда мы пишем алгебры A, то подразумеваем, что A является конечномерной n-Лиевой алгеброй над полем F)

Для удобства дадим следующее определение.

Определение. Подпространство $I \subseteq A$ называется идеалом алгебры A ($I \lhd A$), если $\left[I, A, \cdots, A\right] \subseteq I$.

Из (1) следует, что если $I_1, I_2, \cdots I_n$ - идеалы n-лиевой алгебры A, то их произведение $\left[I_1, I_2, \cdots I_n\right]$ также является идеалом *A*.

Определение. Алгебра A называется разрешимой согласно В.Т.Филиппову, если существует такое число $s \geq 0$, что $A^{(s)} = 0$, где $A^0 = A, A^{(k+1)} = \left[A^{(k)}, \cdots, A^{(k)}\right], k = 0,1\cdots,$ при этом идеал *I n*-лиевой алгебры *A* называется разрешимым, если он является разрешимой алгеброй.

Такое определение дано в [1]. Обобщая это определение дадим следующее.

Определение. Идеал I алгебры A называется к-разрешимым, (2 ≤ k ≤ n), если существует $k \geq 0$ $I^{(r,k)} = 0,$ где $I^{(0,k)} = I,\ I^{(s+1,k)} = \left[I^{(s,k)}, I^{(s,k)}, \cdots, I^{(s,k)}, A\cdots, A\right]$ при $s \geq 0$.

В частности, если в определении к-разрешимых идеалов положить *k=n*, то получим определение разрешимых идеалов по В.Т.Филиппову. Таким образом, идеал I алгебры A является разрешимым согласно В.Т.Филиппову только тогда, когда он является разрешимой алгеброй. Учитывая это, можно дать следующее определение

Определение. Идеал I алгебры A называется к-разрешимым по В.Т.Филиппову, если существует $r \geq 0$, такое, что $I^{(r,k)} = 0$ ($2 \leq k \leq n$), где $I^{(0,k)} = I, I^{(s+1+k)} = \left[I^{(s,k)}, I^{(s,k)}, \cdots, I^{(s,k)}, I\cdots, I\right]$ при $s \geq 0$.

В этом случае в конечномерных *n*-лиевых алгебрах существует *n*-разрешимый радикал (радикал В.Т.Филиппова). В ослабленной форме – это свойство выполняется и для (*n*-1)-разрешимых идеалов по В.Т.Филиппову.

Теорема. Пусть *A* разлагается на сумму двух идеалов, которые являются (*n*-1)-разрешимыми согласно В.Т.Филиппову. Тогда сама алгебра *A* является (*n*-1)-разрешимой алгеброй.

Доказательство. Из определения следует, что

$$A^{(r,n-1)} = [A^{(r-1,\,n-1)}, ...,\ A^{(r-1,\,n-1)}, A]$$
$$I^{(r,n-1)} = [I^{(r-1,\,n-1)}, ...,\ I^{(r-1,\,n-1)}, A]$$
$$J^{(r,n-1)} = [J^{(r-1,\,n-1)}, ...,\ J^{(r-1,\,n-1)}, A]$$

Для краткости, членов производного ряда $A^{(r,n-1)}, I^{(r,n-1)}, J^{(r,n-1)}$ обозначим через A_r, I_r, J_r соответственно. Тогда по условию существует такое $s \geq 0,$ что $I_s = 0, J_s = 0.$ Покажем, что для любого $r \geq 0,$ существует такое число *t(r),* что $A_{t(r)} \subseteq I_r + J_r.$ Отсюда следует, что $A_{t(s)} = 0$, т.е. алгебра A является (*n*-1)-разрешимой алгеброй. Основанием индукции является равенство $A = I + J = I_0 + J_0.$ Пусть для некоторого $r \geq 0$ справедливо включение $A_{t(r)} \subseteq I_r + J_r$. Покажем, что верно $A_{t(r+1)} \subseteq I_{r+1} + J_{r+1}.$

Рассмотрим канонический эпиморфизм $\varphi : A \mapsto \overline{A} = A/J_r, \varphi(I) = \overline{I}, \varphi(J) = \overline{J}$. Тогда $\overline{A_{t(r)}} \subseteq \overline{I_r, A_{t(r)+1}} \subseteq \overline{I_{r+1}} + \overline{I_r} \bigcap \overline{J, A_{t(r)+2}} \subseteq \overline{I_{r+1}} + \overline{I_r} \bigcap \overline{J_1},$ и т.д., $\overline{A_{t(r)+r+1}} \subseteq \overline{I_{r+1}} + \overline{I_r} \bigcap \overline{J_r} = \overline{I_{r+1}}$. Продолжая производный ряд алгебры $\overline{A}$, получим, что для любого *k ≥ 0* имеет место включение $A_{t(r)+(s-r)(r+1)} \subseteq I_r.$ Но тогда $A_{t(r)+(s-r)(r+1)} \subseteq I_{r+1} + J_{r+1}$, и в качестве *t (r+1)* можно положить *t(r+1)=t(r)+(s-r)(r+1)+1.* Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что в конечномерной *n*-Лиевой алгебре существует наибольший (n-1)-разрешимый по В.Т.Филиппову идеал $F_{n-1}(A)$ Однако, $F_{n-1}(A)$ не является радикалом в смысле Амицура-Куроша. Действительно, рассмотрим пример. В [1, §3] В.Т.Филиппов показал,что (*n*–1)-мерное пространство A с базисом $e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}$ и антикоммутативным умножением, определенным формулами $\left[e_1, \cdots, e_1, \cdots, e_n\right] = a_i e_i (a_i \in F_i = 1\cdots, n+1)$ является n-лиевой алгеброй в наборе констант a_i. При $a_{n+1} = 0$ A не является (*n*-1)-разрешимой, поэтому $F_{n-1}(A) \neq A.$ Идеал $I = A^2$ имеет коразмерность 1 и является абелевой подалгеброй. Следовательно, $F_{n-1}(A) = A^2.$ Фактор-алгебра $A/F_{n-1}(A)$ имеет раз-

мерность 1 и также является алгеброй. Следовательно, $A/F_{n-1}(A)$ не полупроста. Это означает, что для $F_{n-1}(A)$ нарушено условие Амицура- Куроша.

Литература:

1.Джекобсон Н. Алгебра Ли.- М.: Мир, 1964.- С.9.

2.Nambu Y. Generelized Hamiltonion dinamiks //Phys. Rev. ,D7.-1978 .- №8.-P. 2405-2412

3.Olieveira C. G. Hamiltonion dinamiks in simplectic phase spece and Nambu's formulation of mechanics //J. Math. phys.-1977.- v.18, №8. - P. 120-125.

4.Филиппов В.Т. Об одном обобщении алгебр Ли. – Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1984. Препринт.- № 64.- С.1-18.

5.Филиппов В.Т. n-лиевые алгебры.//Сибирский математический журнал.- 26 (1985).- С.126-140.

6. Касымов Ш.М. К теории n-лиевых алгебр // Алгебра и логика.-1987.-Т.26.- С. 277-297.

7. Касымов Ш.М. Сопряженность подалгебр Картана в n-лиевых алгебрах // Докл. РАН.-1995.- Т.345,N1.-С.15-18.

Андижон давлат университети,
2015 йил 22 декабрда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.-м.ф.д. Ғ.Мўминов)