ARALASH TIPDAGI BUZILUVCHAN PARABOLIK TENGLAMA UCHUN NOLOKAL CHEGARAVIY MASALA

S.X.Akbarova, N.B.Mamadaliyeva

Ushbu maqola aralash tipdagi buziluvchan parabolik tenglama uchun nolokal chegaraviy masalani tadqiq etishga bag'ishlangan.

Kalit so'zlar: *buzulish chizig'i, buziluvchan tenglama, aralash tipdagi tenglama, nolokal chegaraviy masala, regulyar yechim.*

Статья посвящена исследованию нелокальной краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения смешанного типа.

Ключевые слова: *линия вырождения, вырождающееся уравнение, уравнение смешанного типа, нелокальная краевая задача, регулярное решение.*

This paper is devoted to the investigation of the nonlocal boundary value problem for the mixed type degeneracy parabolik equation.

Key words: *lines of degenerasy, degeneracy equation, equation of mixed type, nonlocal boundary value problem, regulyar solution.*

D - soha $x > 0$ da $t = 0, x = a, t = b$ va $x < 0$ da $t = 0, x = -a, t = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsin.

Quyidagi

$$u_{xx} = k(x)u_t, \tag{1}$$

tenglamani qaraymiz. Bu yerda $x > 0$ da $k(x) = x^{\lambda_1}$, $x < 0$ da $k(x) = (-x)^{\lambda_2}$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Bu tenglama D - sohada aralash tipdagi buziluvchan parabolik tenglamadir [1-2].

D^+ va D^-orqali D - sohaning mos ravishda $x > 0$ va $x < 0$ bo'lgan holdagi qismlarini belgilaymiz:

$$D^+ = \{(x,t): 0 < x < a, 0 < t \le b\},$$
$$D^- = \{(x,t): -a < x < 0, 0 < t \le b\},$$
$$I = \{(x,t): x = 0, 0 < t \le b\},$$
$$J^+ = \{(x,t): 0 < x < a, t = 0\}, \quad J^- = \{(x,t): -a < x < 0, t = 0\},$$
$$L^+ = \{(x,t): x = a, 0 < t \le b\}, \quad L^- = \{(x,t): x = -a, 0 < t \le b\}.$$

Demak, $D = D^+ \cup I \cup D^-$.

Ta'rif. (1) tenglamaning D - sohadagi regulyar yechimi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiyani ataymiz:

1) $u(x,t) \in C^{2,1}(D)$;

2) $u(x,t)$ - $D^+ \cup D^-$ sohada (1) tenglamani qanoatlantiradi.

D - sohada (1) tenglama uchun quyidagi masalani o'rganamiz.

Masala I. Quyidagi xossalarga ega $u(x,t)$ funksiyani aniqlang:

1) $u(x,t) \in C(\overline{D})$;

2) $u(x,t)$ - (1) tenglamaning D - sohadagi regulyar yechimi;

3) ushbu chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi:

$$u\big|_{J^+} = 0, u\big|_{J^-} = 0; \tag{2}$$

$$u(a,t) + \mu_1(t)u(\alpha_1(t),t) = \chi_1(t), 0 \le t \le b, \tag{3}$$

$$u(-a,t) + \mu_2(t)u(\alpha_2(t),t) = \chi_2(t), 0 \le t \le b; \tag{4}$$

4) $$\lim_{x \to +0} u_x(x,t_0) = \lim_{x \to -0} u_x(x,t_0), \tag{5}$$

bu yerda $\mu_i(t), \chi_i(t), \alpha_i(t) (i = 1,2)$ - berilgan funksiyalar bo'lib,

$$\mu_i(t), \chi_i(t), \alpha_i(t) \in C[0,b] \cap C^2(0,b). \tag{6}$$

Shuni ta'kidlash kerakki, aralash tipdagi parabolik tenglamalar uchun nolokal chegaraviy masalalar [3-4] ishlarda o'rganilgan.

Lemma. Agar (1) tenglamaning $u(x,t)$ yechimi $\overline{D^+}$ yopiq sohada musbat maksimumga (manfiy minimumga) $(+0,t_0) \in I$ nuqtada erishsa, u holda

$$\lim_{x \to +0} u_x(x,t_0) < 0 \left(\lim_{x \to +0} u_x(x,t_0) > 0 \right) \tag{7}$$

Teorema. Agar

$$\left|\mu_i(t)\right| \le 1 \ (i = 1,2) \tag{8}$$

tengsizliklar bajarilsa, u holda (1) tenglama uchun qo'yilgan masala I yagona yechimga ega.

Isbot. Yechimning yagonaligi. Faraz qilamiz, $u(x,t)$ - bir jinsli masalaning yechimi bo'lsin. U holda, parabolik tipdagi tenglamalar uchun ekstremum prinsipiga va lemmaga ko'ra, $u(x,t)$ funksiya o'zining musbat maksimumiga va manfiy minimumiga $L^+ \cup J^+ \cup J^- \cup L^-$ da erishadi [2]. D^+, D^- - sohalarning ichida va I oraliqda ekstremumlariga erishishi mumkin emas.

Biror $(a,t_0) \in L^+$ nuqtada musbat maksimumga erishilsin. Belgilash kiritamiz:

$$M = u(a,t_0) = \max_{\overline{D}} \left|u(x,t)\right|.$$

Ravshanki, $\forall (x,t) \in D$ uchun $\left|u(x,t)\right| < M$ o'rinli.

(3) shartga ko'ra, $u(a,t_0)=-\mu_1(t)u(\alpha_1(t_0),t_0)$, bu yerdan (8) tengsizlikka asosan, quyidagini olamiz

$$\left|u(a,t_0)\right|\le\left|\mu_1(t_0)\right|\left|u(\alpha_1(t_0)\ t_0)\right|\le M\left|\mu_1(t_0)\right|\le M.$$

Bu esa ziddiyat.

Shunday qilib, $u(x,t)$ funksiya L^+ da musbat maksimum va manfiy minimumga erishmaydi.

Xuddi shunday, L^- da ham ekstremumlarga erishilmasligini ko'rsatish mumkin.

Demak, $u(x,t)$ funksiya o'zining ekstremumlariga $J^+\cup J^-$ da erishadi. (2) ga asosan D sohada $u(x,t)\equiv 0$ ekanligini olamiz.

Masala I yechimining mavjudligi ekvivalent ravishda Fredgolm integral tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Integral tenglamalar nazariyasi asosida [5-6] va ekvivalentlikka ko'ra, olingan sistema yechimining mavjudligi bevosita masala I yechimining yagonaligidan kelib chiqadi.

Adabiyotlar:

1. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа.- М.: Высшая школа, 1985. - 304 с.

2. Терсенов С.А. Введению в теорию уравнений, вырождающихся на границе.- Новосибирск: 1973. - 143 с.

3. Джураев Т.Д., Акбарова М.Х. Нелокальные краевые задачи для смешанно-параболического уравнения. // УзМЖ.- 1993.- №2.- С.16-25.

4. Исамухаммедов С.С., Акбарова М.Х. Нелокальная краевая задача для вырождающегося параболического уравнения смешанного типа. // Тезисы докл. Междун.научн.конф. «Вырождающихся уравнения и уравнения смешанного типа». Ташкент. 23-25 ноября 1993г.- С.77.

5. Salohiddinov M. Integral tenglamalar.- T.: «Yangiyul polugraph service», 2007. - 256 b.

6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1971. – 436 с.

Андижон давлат университети,
Тошкент ахборот технологиялари университети,
2015 йил 10 июнда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.м.ф-н. Ғ.Мўминов)