ЛИМИТЛАРНИ ҲИСОБЛАШДА РАЦИОНАЛЛАШТИРУВЧИ АЛМАШТИРИШЛАРДАН ФОЙДАЛАНИШ

А.Аҳлимирзаев, М.Мамажонова, Б.Мамадалиев, Т.Нишонов

Мақолада сонли кетма-кетлик ва функциянинг лимитларини ҳисоблашда рационаллаштирувчи алмаштиришлардан фойдаланиш мисоллар ёрдамида баён қилинган.

Калит сўзлар: *сонли кетма-кетлик, сонли кетма-кетликнинг лимити, функция, функциянинг лимити, лимитлар ҳақида теоремалар, иррационал ифодалар, алмаштиришлар.*

В статье рассматриваются способы применения рационализирующих подстановок при вычислении пределов последовательностей и функций.

Ключевые слова*: числовая последовательность, предел числовой последовательности, функция, предел функции, теоремы о пределах, иррациональное выражение, подстановка.*

This article deals with methods of using rational substitutions in calculating limits in sequence and functions with the help of examples.

Key words: *sequences, function, limit of a function, theorems on limits, irrational exposition, substitutions.*

Маълумки, университетларнинг физика ва математика йўналишларида математик анализ фани, бошқа барча таълим йўналишларида эса олий математика фани ўқитилади. Уларнинг ҳар иккисида ҳам кетма-кетлик ва функциянинг лимити ўрганилади. Булар математик анализ (олий математика)нинг фундаментал тушунчаларидан бири ҳисобланади ва муҳим татбиқларга эга. Шунинг учун ҳам уларни ўрганишга алоҳида аҳамият берилиши керак.

Лекин кўп ҳолларда берилган кетма-кетлик ва функциянинг лимитини бевосита ҳисоблаш осон бўлавермайди. Бундай ҳолларда уларни ҳисоблашни осонлаштирувчи алмаштиришлардан фойдаланилади. Ҳисоблашни осонлаштирувчи алмаштиришлардан кўпроқ математик анализнинг интеграллаш бўлимида фойдаланилар эди. Ушбу мақолада эса биз кетма-кетлик ва функция лимитини ҳисоблашда алмаштиришлардан қандай фойдаланиш мумкинлиги ҳақида фикр юритамиз.

$R\left(u\left(x\right),v\left(x\right),\ldots\right)$ ва $R^*(t)$ лар ўз аргументларига кўра рационал функциялар бўлсин. Бунда $R^*(t)$ функция $t=\varphi\left(x\right)$ алмаштириш орқали биринчи функциядан ҳосил қилинади. Бунда бир неча ҳоллар бўлиши мумкин:

I. $\lim_{x\to x_0}R(x,\sqrt[n]{ax+b})=\lim_{t\to t_0}R^*(t)$, бу ерда $t=\sqrt[n]{ax+b}, t_0=\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{ax+b}$, n – бирдан катта ихтиёрий мусбат бутун сон.

II. $\lim_{x\to x_0}R\left(x,\sqrt[m]{ax+b},\sqrt[n]{ax+b},\ldots\right)=\lim_{t\to t_0}R^*\left(t\right)$, бу ерда $t=\sqrt[r]{ax+b}, t_0=\lim_{x\to x_0}\sqrt[r]{ax+b}$, m ва n - бутун мусбат сонлар, r эса – m ва n сонларнинг энг кичик умумий каррализи.

III. $\lim_{x\to x_0}R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)=\lim_{t\to t_0}R^*\left(t\right)$, бу ерда $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, t_0=\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, n – мусбат бутун сон.

IV. $\lim_{x\to x_0}R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\ldots\right)=\lim_{t\to t_0}R^*\left(t\right)$, бу ерда $t=\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}, t_0=\lim_{x\to x_0}\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, m ва – мусбат бутун сонлар, r эса – шу сонларнинг энг кичик умумий каррализи.

V. $\lim_{x\to x_0}x^m\left(a+bx^n\right)^p=\lim_{t\to t_0}R^*\left(t\right)$, бу ерда:

a) $t=\sqrt[r]{x}, t_0=\lim_{x\to x_0}\sqrt[r]{x}$, агар p бутун сон бўлса;

b) $t=\sqrt[s]{a+bx^n}, t_0=\lim_{x\to x_0}\sqrt[s]{a+bx^n}$, агар $\frac{m}{n}$ бутун сон бўлса;

c) $t=\sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^m}}, t_0=\lim_{x\to x_0}\sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^m}}$, агар $\frac{m}{n}+p$ бутун сон бўлса; m ва n – рационал сонлар, r - шу сонлар махражларининг энг кичик умумий карралиси, s эса – p сонининг махражи.

VI. $\lim_{x\to x_0} R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=\lim_{t\to t_0} R^*(t), (a\neq 0)$, бу ерда:

a) $t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}$, ёки $\left(t=\sqrt{ax^2+bx+c}-x\sqrt{a}\right)$, $t_0=\lim_{x\to x_0}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}\right)$ агар $b^2-4ac<0$ бўлса (Эйлернинг биринчи алмаштириши);

b) $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}$, $\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}$, бу ерда x_1 ax^2+bx+c квадрат учҳаднинг илдизи (Эйлернинг иккинчи алмаштириши).

VII. $\lim_{x\to x_0} R(\cos x,\sin x)=\lim_{t\to t_0} R^*(t)$, бу ерда $t=tg\frac{x}{2}$, $t_0=\lim_{x\to x_0} tg\frac{x}{2}$, ёки

a) $t=\cos x, t_0=\lim_{x\to x_0}\cos x$, агар $R(\cos x,-\sin x)=R(\cos x,\sin x)$ бўлса;

b) $t=\sin x, t_0=\lim_{x\to x_0}\sin x$, агар $R(-\cos x,\sin x)=R(\cos x,\sin x)$ бўлса;

c) $t=tgx, t_0=\lim_{x\to x_0} tgx$, агар $R(-\cos x,-\sin x)=R(\cos x,\sin x)$ бўлса.

Қуйида юқоридаги алмаштиришларга доир мисоллар келтирамиз:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+ax}}{x}$ ҳисоблансин.

Ечиш: $1+ax=t^{mn}$ алмаштириш қиламиз. У ҳолда $ax=t^{mn}-1, x=\frac{t^{mn}-1}{a}$, $t^{mn}-1=0, t=1$. Демак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+ax}}{x}=a\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^n-t^m\right)'}{\left(t^{mn}-1\right)'}=a\lim_{t\to 1}\frac{nt^{n-1}-mt^{m-1}}{mnt^{mn-1}}=a\frac{n-m}{mn}=a\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right).$$

2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ ҳисоблансин.

Ечиш: $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right).\frac{n+1}{n}=t^2$ алмаштириш қиламиз. У ҳолда $nt^2=n+1, n\left(t^2-1\right)=1, n=\frac{1}{t^2-1}$ ва $n\to\infty$, $t\to 1$.

Буларни эътиборга олсак,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right)=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t^2-1}(t-1)=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t+1}=\frac{1}{2}.$$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{(1+x)^n}-1}{x}$ ҳисоблансин.

Ечиш: $t=\sqrt[m]{1+x}$ алмаштириш қиламиз. У ҳолда $1+x=t^m, x=t^m-1$, $x\to 0, t\to 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{(1+x)^n}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{\sqrt[m]{t^{mn}}-1}{t^m-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^n-1\right)'}{\left(t^m-1\right)'}=\lim_{t\to 1}\frac{nt^{n-1}}{mt^{m-1}}=\frac{n}{m}.$$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ ҳисоблансин.

Ечиш: $t=\sqrt{1+x^2}+x$ алмаштириш қиламиз. У ҳолда $x\to 0, t\to 1$. $\sqrt{1+x^2}=t-x$, $1+x^2=t^2-2tx+x^2$, $t^2-2tx=1, 2tx=t^2-1, x=\frac{t^2-1}{2t}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t^n-t^{-n}}{\frac{t^2-1}{2t}}=\lim_{t\to 1}\frac{2t\left(t^n-t^{-n}\right)}{t^2-1}=2\lim_{t\to 1}\frac{\left(t^{1+n}-t^{1-n}\right)'}{\left(t^2-1\right)'}=$$

$$2\lim_{t\to 1}\frac{nt^n+t^n-t^{-n}+nt^{-n}}{2t}=2\frac{n+1-1+n}{2}=2n.$$

5. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)^p+\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^p}{n^p}$ ни ҳисобланг.

Ечиш: $n-\sqrt{n^2-1}=n+1-\sqrt{n^2-1}-1=\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)-1=\sqrt{n+1}\dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}-1=$

$$\sqrt{n+1}\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}-1=\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}-1=\frac{2\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}+1}-1=\frac{2t}{t+1}-1=\frac{t-1}{t+1}.$$

Бу ерда $\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}=t$ белгилаш қилдик.

$$n+\sqrt{n^2-1}=n+1+\sqrt{n^2-1}-1=\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)-1=\sqrt{n+1}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}-1=$$

$$\sqrt{n+1}\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}-1=\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}-1=\frac{2\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}}{\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1}-1=\frac{2t}{t-1}-1=\frac{t+1}{t-1}.$$

Бу ерда ҳам $\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}=t$ белгилаш қилдик.

Навбатда n нинг t орқали ифодасини топамиз. Бунинг учун $\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}=t$ дан n нинг t орқали ифодасини топамиз.

$$\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}=t,\frac{n+1}{n-1}=t^2,n+1=nt^2-t^2,n-nt^2=-1-t^2,n\left(1-t^2\right)=-\left(1+t^2\right),n=-\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{t^2+1}{t^2-1}.$$

Бундан ташқари, $n\to\infty$ да $t\to 1$ эканлигини ҳисобга оламиз.

Энди $n-\sqrt{n^2-1},n+\sqrt{n^2-1}$ ва n ларнинг t орқали ифодаларини берилган ифодага қўямиз.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-1}\right)^p+\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)^p}{n^p}=\lim_{t\to 1}\frac{\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^p+\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^p}{\left(\frac{t^2+1}{t^2-1}\right)^p}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^{2p}+(t+1)^{2p}}{\left(t^2+1\right)^p}=\frac{0+2^{2p}}{2^p}=2^p.$$

(бу ерда $p\in N$).

6. $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{tg3\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$ ҳисоблансин.

Ечиш: $t=tg\alpha$ алмаштириш қиламиз. У ҳолда $\alpha\to\dfrac{\pi}{4},t\to 1.tg3\alpha,\sin 2\alpha,\cos 2\alpha$ ларни $tg\alpha$ орқали ифодалаймиз.

$$tg3\alpha=\frac{3t-t^3}{1-3t^2},\ \sin 2\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos 2\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Буларни ўринларига қўямиз: $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}\frac{tg3\alpha+sin2\alpha}{cos2\alpha}=\lim\limits_{t\to1}\frac{\frac{3t-t^3}{1-3t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\lim\limits_{t\to1}\frac{\left(3t-t^3\right)\left(1+t^2\right)+2t\left(1-3t^2\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1-3t^2\right)}$

$$=\lim_{t\to1}\frac{5t-4t^3-t^5}{\left(1-t^2\right)\left(1-3t^2\right)}=\lim_{t\to1}\frac{-t\left(t^2+5\right)\left(t^2-1\right)}{\left(1-t^2\right)\left(1-3t^2\right)}=\lim_{t\to1}\frac{t\left(t^2+5\right)}{1-3t^2}=\frac{1+5}{1-3}=-3$$

Талабаларда лимитларни ҳисоблашни осонлаштирувчи юқоридагидек алмаштиришлардан фойдалана олиш малакаларини ҳосил қилиш уларнинг келгусида ўрганадиган интегралларни ҳисоблаш усулларини эгаллашлари учун замин яратади.

Адабиётлар:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.- М., 1965.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.- М., 1966.

Андижон давлат университети,
2015 йил 16 декабрда қабул қилинган
(Тақризчи: ф.-м-ф.д. Г.Мўминов)