AYNIYATLAR YORDAMIDA BA'ZI YIG'INDILARNI HISOBLASH

M.K.Mahkamov, Sh.G'.Mo'minov, M.M.Toshpo'latova

Maqolada ayniyatlar yordamida bir xil darajali natural sonlar yig'indisi uchun hisoblash formulalari va ularning ba'zi chekli yig'indilarini hisoblashga tatbiqi dasturlash bilan keltirilgan.

Kalit so'zlar: *ayniyat, chekli yig'indi, bir xil darajali natural sonlar yig'indisi, dasturlash.*

В статье приведены формулы вычисления конечных сумм степеней натуральных чисел с помощью тождеств и программирования.

Ключевые слова: *тождество, конечная сумма, сумма степеней натуральных чисел, программирование.*

With the help of identities and programming the article gives the formulas of calculation of the final sums of degrees of natural numbers

Key words: *identity, final sums, sum of degrees of natural numbers, programming.*

Ma'lumki, dastlabki n ta natural sonlar yig'indisini hisoblash uchun arifmetik progressiya yoki Gauss usulini qo'llab hisoblash formulasini olish mumkin.

Biz bu maqolada ayniyatlar yordamida k natural soni uchun

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \qquad (1)$$

ko'rinishdagi yig'indilarni hisoblash formulalarini va bu formulalar vositasida murakkabroq ko'rinishga ega yig'indilarni hisoblashga oid misollardan namunalar keltiramiz. Shu bilan birga, misollarni yechish jarayonida qiyinchilik tug'diruvchi hisob ishlarini yengillashtirish maqsadida amaliy dasturlar keltiramiz. Dasturlashdan foydalanish yechish jarayoni to'g'ri bajarilayotganini, misollar yechimining vizual holatda aniq ifodalanganiga ishonch hosil qilish imkonini yaratadi.

Dastlab bir nechta misollarni yechish jarayonida ayniyatlardan foydalanib yig'indilarni hisoblash uchun hisoblash formulasini analitik ifodalaymiz va har bir misol uchun dasturlashni amalga oshiramiz. Boshqa usullar bilan ko'rsatilgan yig'indilarni hisoblash muammolari [1-3] adabiyotlarda bayon qilingan.

1-misol. $k = 1$ bo'lganda (1) formuladan

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n$$

yig'indini hisoblash uchun

$$(m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$$

ayniyatdan foydalanamiz. Bu ayniyatdan:

$m=1$ bo'lsa, $2^2-1^2=2\cdot 1+1,$

$m=2$ bo'lsa, $3^2-2^2=2\cdot 2+1,$

$m=3$ bo'lsa, $4^2-3^2=2\cdot 3+1,$

.....

$m=n$ bo'lsa, $(n+1)^2-n^2=2\cdot n+1$

tengliklarni yozishimiz mumkin. Bu tengliklarni hadlab qo'shish bilan

$$(n+1)^2-1^2=2\cdot S_1(n)+n$$

tenglikni va bundan

$$S_1(n)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (2)$$

hisoblash formulasini hosil qilamiz.

Endi (2) hisoblash formulasi bo'yicha dasturlashni amalga oshiramiz:

```
var k,n:integer; S,S1:real;
begin
   S:=0.0;
   write('n='); read(n);
   for k:=1 to n do
   S:=S+k;
   S1:=k*(k+1)/2;
   writeln(s:5:2,' ',s1:5:2);
end.
```

2-misol. $k=2$ bo'lganda (1) formuladan kelib chiquvchi

$$S_2(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2$$

yig'indini hisoblash uchun

$$(m+1)^3-m^3=3m^2+3m+1$$

ayniyatdan foydalanib, yuqoridagi kabi hisoblashlar bilan

$$(n+1)^3-1^3=3\cdot S_2(n)+3\cdot S_1(n)+n$$

tenglikni va bundan izlanayotgan yig'indi uchun

$$S_2(n)=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (3)$$

hisoblash formulasini hosil qilamiz. Endi (3) hisoblash formulasi bo'yicha dasturlashni amalga oshiramiz:

```
var k,n:integer; S,S1:real;
begin
   S:=0.0;
   write('n='); read(n);
   for k:=1 to n do
   S:=S+sqr(k);
   S1:=k*(k+1)*(2*k+1)/6;
   writeln(s:5:2,' ',s1:5:2);
end.
```

3-misol. $k=3$ bo'lganda (1) formuladan

$$S_3(n)=1^3+2^3+\cdots+n^3$$

yig'indini hisoblash uchun

$$(m+1)^4-m^4=4m^3+6m^2+4m+1$$

ayniyatdan foydalananib, yuqoridagi kabi hisoblashlar bilan

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4\cdot S_3(n) + 6\cdot S_2(n) + 4\cdot S_1(n) + n$$

tenglikni va bundan izlanayogan yig'indi uchun

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \qquad (4)$$

hisoblash formulasini hosil qilamiz. Endi (4) hisoblash formulasi bo'yicha dasturlashni amalga oshiramiz:

```
var k,n:integer; S,S1:real;
begin
   S:=0.0;
   write('n='); read(n);
   for k:=1 to n do
   S:=S+sqr(k)*k;
   S1:=sqr(k*(k+1)/2);
   writeln(s:5:2,' ',s1:5:2);
end.
```

Bu jarayonni ketma-ket davom ettirib, $S_4(n), S_5(n), \ldots$ dastlabki n ta natural sonlarning bir xil darajalari yig'indisini hisoblash formulalarini topishimiz mumkin.

Agar yig'indini tashkil etuvchi hadlarning umumiy hadi ma'lum bo'lsa, umumiy hadga mos ayniyat yordamida bayon etilgan usul bilan ba'zi chekli yig'indilarni hisoblashni amalga oshirish mumkinligini misollarda ko'rishimiz mumkin.

Quyidagi misol attestatsiya jarayonida ymymta'lim maktablari matematika o'qituvchilariga tavsiya etilgan.

4-misol. Quyidagi yig'indini hisoblang:

$$3\cdot 7 + 7\cdot 11 + 11\cdot 15 + \cdots + 79\cdot 83$$

Yechilishi: Qaralayotgan yig'indining har bir qo'shiluvchisi $(4m-1)\cdot(4m+3)$ qonuniyat bo'yicha tuzilganligini hisobga olib, umumiy holda

$$S(n) = 3\cdot 7 + 7\cdot 11 + 11\cdot 15 + \cdots + 79\cdot 83 + \cdots + (4n-1)\cdot(4n+3)$$

yig'indini hisoblash uchun

$$(4m-1)\cdot(4m+3) = 16m^2 + 8m - 3$$

ayniyatdan foydalanamiz. Bu ayniyatdan

$m=1$ bo'lsa, $3\cdot 7 = 16\cdot 1^2 + 8\cdot 1 - 3,$

$m=2$ bo'lsa, $7\cdot 11 = 16\cdot 2^2 + 8\cdot 2 - 3,$

$m=3$ bo'lsa, $11\cdot 15 = 16\cdot 3^2 + 8\cdot 3 - 3,$

……..

$m=n$ bo'lsa, $(4n-1)(4B+3) = 16\cdot n^2 + 8\cdot n - 3$

tengliklarni yozishimiz mumkin. Bu tengliklarni hadlab qo'shish bilan

$$S(n) = 16\cdot S_2(n) - 8\cdot S_1(n) - 3n$$

tenglikni va bundan yuqoridagi 1-, 2-misollarni yechishda hosil bo'lgan

$$S_1(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},\ S_2(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

hisoblash formulalariga ko'ra izlangan yig'indi umumiy ko'rinishda

$$S(n) = 16\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 8\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 3n = \frac{8n(n+1)(2n+1)}{3} + n(4n+1)$$

ifodalanishini va misolda berilgan y'igindi $S(20)=\frac{80\cdot 21\cdot 41}{3}+20\cdot 81=47540$ ekanligini aniqlaymiz.

Bu misolning yechilishi to'g'ri bajarilganini aniqlashga xizmat qiluvchi dasturni tuzamiz:

```
var m,n:integer; S,S1:real;
begin
    S:=0.0;
    write('n='); read(n);
    for m:=1 to n do
    S:=S+(4*m-1.0)*(4*m+3.0);
    S1:=8*m*(m+1)*(2*m+1)/3+m*(4*m+1);
    writeln(s:5:2,' ',s1:5:2);
end.
```

Tuzilgan dasturlar asosida hisoblash tajribalari o'tkazildi, ya'ni kompyuterda hisoblash ishlari bajarilib, sonli natijalar olindi. Yuqorida berilgan masalalarning yechimi bo'lgan dastur natijalari zamonaviy kompyuterlardan samarali foydalanishga, masala yechimini qulay tasavvur qilishga imkon beradi. Masalaning yechimini topishda inson tomonidan sarflanadigan mehnat kamayishi, tezkorlik hamda ishlash jarayonida o'zgartirish osonligini ta'kidlash muhim.

Yuqorida keltirilgan masalalarni yechish algoritmlari va dasturlarini yig'indilarni hisoblay olish bilim va ko'nikmalarini shakllantirishda qo'shimcha omillar bo'lib xizmat qilishini ko'rsata olamiz. O'ylaymizki, bu kabi dasturlarni tuzish, ishga tushirish, ommalashtirish hamda ulardan dars o'tish jarayonida foydalanish talabalarning dasturlashga bo'lgan qiziqishlarini sezilarli orttirib, takrorlanish jarayonlariga oid masalalarni chuqurroq anglab yetishlariga imkon beradi.

Mustaqil yechish uchun misollar

Ayniyatlar tuzish bilan 1-3-misollarda keltirilgan natural sonlarning bir xil darajalari yig'indilarini hisoblash formulalaridan foydalangan holda quyidagi misollarni yeching va yechish jarayoni uchun dasturlar tuzing.

1) $S(n)=1+3+5+\cdots+(2n-1)$;
2) $S(n)=1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$;
3) $S(n)=1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$;
4) $S(n)=1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$;
5) $S(n)=1^4+3^4+5^4+\cdots+(2n-1)^4$;
6) $S(n)=5^3+8^3+11^3+\cdots+(3n+2)^3$;
7) $S(n)=1\cdot 5+3\cdot 8+5\cdot 11+\cdots+(2n-1)(3n+2)$;
8) $S(n)=3\cdot 4+7\cdot 7+11\cdot 10+\cdots+(3n+1)(4n-1)$;
9) $S(n)=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!$;
10) $S(n)=1^2\cdot 1!+2^2\cdot 2!+3^2\cdot 3!+\cdots+n^2\cdot n!$;
11) $S(n)=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$;
12) $S(n)=1\cdot 2\cdot 3+3\cdot 5\cdot 7+\cdots+(2n-1)\cdot(3n-1)\cdot(4n-1)$;
13) $S(n)=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;
14) $S(n)=\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$;
15) $S(n)=1\cdot 2^3+3\cdot 7^3+5\cdot 12^3+\cdots+(2n-1)\cdot(5n-3)^3$.

Adabiyotlar:

1. Винер И.Я., Войцеховский А.П. Об использовании дифференцирования при нахождениях некоторых конечных сумм. // Математика в школе.- 1968.- №2.- С.84-87.
2. Тар М.М. Об одном методе суммирования степеней натурального ряда. // Математика в школе.- 1968.- №2.- С.84.
3. Ляпин С.Е. Суммирование некоторых конечных рядов. // Математика в школе.-1951.- №4.- С.1-11.

Андижон давлат университети,
2015 йил 15 декабрда қабул қилинган
(Тақризчи: проф. Ғ.Мўминов)